EXERCICE DE MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS - SOLIDES DÉFORMABLES
Relation module de cisaillement, module d'Young et coefficient de Poisson

Christophe FOND
Université de Strasbourg, I.U.T Robert Schuman

La Fig. 1 décrit un élément de matière de forme carrée de dimensions $2L * 2L$ dans le plan $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ dans un espace $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$. On considérera que le point O au centre du carré est fixe, i. e. que son déplacement est nul. La loi de comportement de cette matière correspondant à de l'élasticité linéaire isotrope définie par les deux paramètres matériau E et ν qui sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau. L'état de contrainte est tel que $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xy} = 0$. Rappelons que la loi de comportement peut s'écrire :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} (1+\nu)\sigma_{xx}/E - \nu Tr(\underline{\underline{\sigma}})/E & (1+\nu)\sigma_{xy}/E & (1+\nu)\sigma_{xz}/E \\ (1+\nu)\sigma_{xy}/E & (1+\nu)\sigma_{yy}/E - \nu Tr(\underline{\underline{\sigma}})/E & (1+\nu)\sigma_{yz}/E \\ (1+\nu)\sigma_{xz}/E & (1+\nu)\sigma_{yz}/E & (1+\nu)\sigma_{zz}/E - \nu Tr(\underline{\underline{\sigma}})/E \end{bmatrix}$$

où $\underline{\underline{\epsilon}}$ est le tenseur des déformations, $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes et $Tr(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$. On notera pour la suite τ une contrainte de valeur positive.

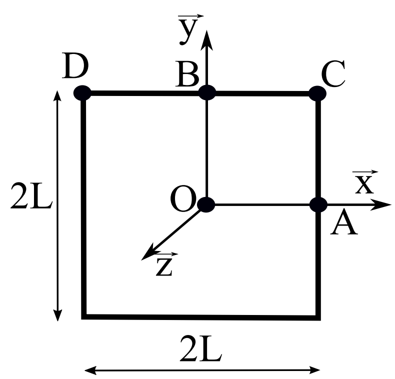

FIGURE 1 – Élément de matière de forme carrée dans le plan (x,y).

1 Compression selon l'axe x

Considérons dans un premier temps une compression selon $\overrightarrow{x}$ de sorte que :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.1 Déformation selon l'axe x

En quelle unité s'exprime la contrainte τ ? Calculez ϵ_{xx} à l'aide de la loi de Hooke. En déduire le déplacement du point A (votre résultats doit donner des mètres).

1.2 Déformation selon l'axe y

Calculez ϵ_{yy} à l'aide de la loi de Hooke. En déduire le déplacement du point B.

1.3 Transformation du carré

En supposant que $\nu = 0.25$, dessinez la déformée de l'élément de matière en la superposant à sa forme initiale dans le plan le plan $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ sachant que $u = \epsilon_{xx} x, v = \epsilon_{yy} y, w = \epsilon_{zz} z$ où u, v et w sont respectivement les déplacements selon $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{z}$. En quelle forme se transforme le carré initial ?

2 Traction selon l'axe y

Considérons ensuite une traction selon $\overrightarrow{y}$ de sorte que :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.1 Déformation selon l'axe y

Calculez ϵ_{yy} à l'aide de la loi de Hooke. En déduire le déplacement du point B.

2.2 Déformation selon l'axe x

Calculez ϵ_{xx} à l'aide de la loi de Hooke. En déduire le déplacement du point A.

2.3 Transformation du carré

En supposant que $\nu = 0.25$, dessinez la déformée de l'élément de matière en la superposant à sa forme initiale dans le plan le plan $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ sachant que $u = \epsilon_{xx}x, v = \epsilon_{yy}y, w = \epsilon_{zz}z$ où $u, vetw$ sont respectivement les déplacements selon $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} et \overrightarrow{z}$. En quelle forme se transforme le carré initial ?

3 Compression et traction simultanées

Considérons désormais que les compression et traction des questions précédentes soient appliquées simultanément. En petites déformations - élasticité linéaire - et en petits déplacements, les hypothèses des petites perturbations sont respectées et la superposition est permise. L'état de contrainte est donc donné par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -\tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.1 Facette à 45 degrés

Calculez le vecteur contrainte $\overrightarrow{T}$ pour une facette orientée par $\overrightarrow{n} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$. Dessinez la facette et le vecteur contrainte et montrez qu'il s'agit d'une contrainte purement tangentielle.

3.2 Facette à 135 degrés

Calculez le vecteur contrainte $\overrightarrow{T'}$ pour une facette orientée par $\overrightarrow{t} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$. Dessinez la facette et le vecteur contrainte et montrez qu'il s'agit d'une contrainte purement tangentielle.

3.3 État de contrainte

Expliquez pourquoi il s'agit d'un état de contrainte de cisaillement pur d'intensité τ dans un repère à 45 degrés.

3.4 Déformées

En supposant que $\nu = 0.25$, dessinez la déformée de l'élément de matière en la superposant à sa forme initiale dans le plan le plan $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$. Calculez les déplacements des points A, B, C et D en additionnant les effets de la traction et de la compression puisque la superposition est permise.

4 Expression de μ à partir de E et ν

4.1 Distorsion d'angle γ

Comme l'indique La Fig. 2, l'angle des diagonales du carré initial vaut $\pi/2$. Les angles des diagonales du rectangle obtenu après déformation du carré valent $\pi/2 - \gamma$ et $\pi/2 + \gamma$. Calculez cet angle γ sachant qu'en petites déformations $\gamma \approx tan(\gamma)$.

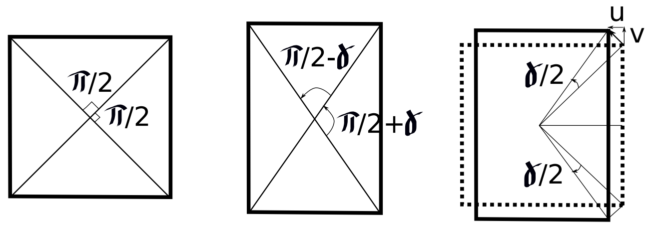

FIGURE 2 – Angle définissant la distorsion. u et v sont respectivement les déplacements selon l'axe $\overrightarrow{x}$ et l'axe $\overrightarrow{y}$ du point C.

4.2 Relation μ, E et ν

Si le module de cisaillement, noté μ ou G selon les auteurs, est défini par $\tau = \mu\gamma$ alors montrez que $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$. En quelle unité s'exprime le module de cisaillement ?

4.3 Remarque sur la distorsion

Si l'on considère 2 traits perpendiculaires dessinés sur la matière avant déformation, seront-ils toujours à angle droit après déformation par cisaillement pur, quelle que soit l'orientation que l'on a donnée à ces traits ?