

MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS SOLIDES  
EXERCICES  
ECPM année 2012-2013

Christophe Fond

*Université de Strasbourg*  
*Christophe.Fond@unistra.fr*

---

**Résumé**

Quelques exercices de M. M. C. "concrets", de difficultés très variables, limités aux hypothèses des petites perturbations, i. e. élasticité linéaire et petits déplacements. L'objectif est d'illustrer des notions utiles pour la caractérisation mécanique. Pour finir, un peu de thermomécanique du collage au travers d'un exercice plus difficile.

*Mots clefs:* solides déformables - mécanique des milieux continus - contraintes - déformations - dilatation thermique - thermomécanique - caractérisation mécanique - élasticité linéaire isotrope - petites déformations - cinématique

---

## Table des matières

<b>1 Déplacements et déformations</b>	<b>3</b>
1.1 Questions . . . . .	3
1.2 Réponses . . . . .	3
<b>2 Mesure de la déformation en traction uniaxiale</b>	<b>4</b>
2.1 Questions . . . . .	4
2.2 Réponses . . . . .	4
<b>3 Essai de traction uniaxiale</b>	<b>5</b>
3.1 Questions . . . . .	5
3.2 Réponses . . . . .	5
<b>4 Cisaillement, distorsion, modules d'élasticité</b>	<b>7</b>
4.1 Questions . . . . .	7
4.2 Réponses . . . . .	7
<b>5 A propos de l'essai de compression</b>	<b>8</b>
5.1 Questions . . . . .	10
5.2 Réponses . . . . .	10
<b>6 Dilatations différentielles</b>	<b>10</b>
6.1 Questions . . . . .	10
6.2 Réponses . . . . .	12

## 1. Déplacements et déformations

### 1.1. Questions

On considère un champ de déplacements défini le dans le repère cartésien  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  par les composantes  $\vec{U} = (u_x, u_y, u_z)$ . Les déplacements sont tels que :  $u_x = -\nu ax + cy$ ,  $u_y = -\nu ay - cx$  et  $u_z = az + b$ , où a, b et c sont des constantes. On rappelle que le calcul des déformations est donné par

$$\underline{\underline{\epsilon}} = (1/2)(\underline{\underline{grad}}\vec{U} + \underline{\underline{grad}}^T\vec{U})$$

1 - Décomposer ce champ en translation, rotation et déformation.

2 - Calculer les contraintes liées aux déformations en élasticité linéaire isotrope. De quelle type de sollicitation s'agit-il ?

### 1.2. Réponses

1 - Ce champ de déplacements contient une translation de solide rigide selon  $\vec{z}$  d'amplitude b, i. e.  $\vec{U}_0 = (0, 0, b)$ . Il contient aussi une rotation selon  $\vec{z}$  d'amplitude  $-c$  définie par le pseudo vecteur  $\vec{\omega} = (0, 0, -c)$  de sorte que  $\vec{\omega} \wedge (x, y, z) = (cy, -cx, 0)$ . Ce pseudo vecteur est équivalent à la matrice  $[\Omega]$

$$\vec{\omega} \wedge \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cy \\ -cx \\ 0 \end{bmatrix} = [\Omega] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c & 0 \\ -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Enfin, la déformation obtenue en calculant le gradient du vecteur déplacement.

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\partial u_x/\partial x & \partial u_y/\partial x + \partial u_x/\partial y & \partial u_z/\partial x + \partial u_x/\partial z \\ \partial u_y/\partial x + \partial u_x/\partial y & 2\partial u_y/\partial y & \partial u_y/\partial z + \partial u_z/\partial y \\ \partial u_z/\partial x + \partial u_x/\partial z & \partial u_y/\partial z + \partial u_z/\partial y & 2\partial u_z/\partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu a & 0 & 0 \\ 0 & -\nu a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Finalement la décomposition en translation + rotation + déformation donne respectivement

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cy \\ -cx \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\nu ax \\ -\nu ay \\ az \end{bmatrix}$$

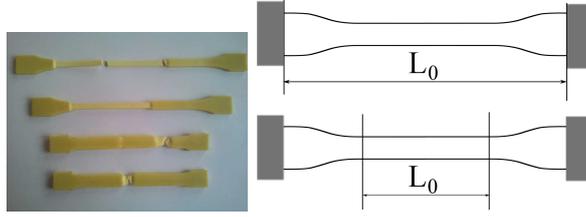


FIGURE 1: Strictions et ruptures en traction uniaxiale - schéma de l'éprouvette de traction.

2 - En élasticité linéaire isotrope la loi de comportement peut s'écrire

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 2\mu\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) & 2\mu\epsilon_{xy} & 2\mu\epsilon_{xz} \\ 2\mu\epsilon_{xy} & 2\mu\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) & 2\mu\epsilon_{yz} \\ 2\mu\epsilon_{xz} & 2\mu\epsilon_{yz} & 2\mu\epsilon_{zz} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \end{bmatrix}$$

d'où

$$\underline{\underline{\sigma}} = a \begin{bmatrix} -2\mu\nu + \lambda(1 - 2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & -2\mu\nu + \lambda(1 - 2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu + \lambda(1 - 2\nu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Ea \end{bmatrix}$$

$$\text{car } \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ et } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

## 2. Mesure de la déformation en traction uniaxiale

### 2.1. Questions

Supposons que l'on mesure, en traction uniaxiale, un allongement  $\Delta L$  pour une longueur initiale  $L_0$ . Cet allongement s'effectue dans la première direction principale puisque cela correspond à la plus grande déformation, i. e.  $\epsilon_1$ . Nous noterons  $x_1$  cette direction et  $u_1(x_1)$  les déplacements dans cette direction. On pose  $u_1(0) = 0$ .

1 - Comment s'exprime le déplacement en  $x_1 = L_0$  à partir de  $\epsilon_1$  si  $\epsilon_1$  est uniforme ?

2 - Comment s'exprime le déplacement en  $x_1$  à partir de  $\epsilon_1$  si  $\epsilon_1$  n'est pas uniforme ? Que peut-on en déduire concernant la mesure  $\Delta L/L_0$  ?

3 - Peut-on mesurer convenablement la déformation à l'aide du déplacement de la traverse de la machine de traction ?

### 2.2. Réponses

1 -  $\epsilon_1 = \partial u_1 / \partial x_1$  et dans ce cas  $\partial u_1 / \partial x_1 = \Delta L / L_0$  partout donc  $u_1(L_0) = \Delta L = \epsilon_1 L_0$

2 -  $u_1(x_1) \equiv \int_0^{x_1} (\partial u_1(l) / \partial l) dl$  donc  $u_1(x_1) = \int_0^{x_1} \epsilon_1(l) dl$ . Il vient  $\Delta L = \int_0^{L_0} \epsilon_1(l) dl$  puis  $\Delta L / L_0 = (1/L_0) \int_0^{L_0} \epsilon_1(l) dl$ . En d'autres termes,  $\Delta L / L_0$  est la moyenne de la déformation  $\epsilon_1$  calculée entre 0 et  $L_0$ , i. e.  $\Delta L / L_0 = \langle \epsilon_1 \rangle$ .

3 - L'idéal est de placer un extensomètre ou une jauge de déformation dans la zone où la déformation est uniforme, i. e. non perturbée par les bords. Toutefois, lorsqu'une striction apparaît dans la zone de mesure, la valeur mesurée n'est plus convenable et constitue une moyenne. Si l'on ne dispose que de la mesure du déplacement de la traverse, le déplacement  $\Delta L$  va intégrer des déformations plus petites correspondant aux zones où l'éprouvette est plus large. La contrainte moyenne de traction selon  $x_1$  vaut  $F/S$ , i. e.  $\langle \sigma_1(x_1) \rangle = F/S(x_1)$  où la moyenne est cette fois calculée sur  $S$  en intégrant sur  $x_2$  et  $x_3$ . On remarque que  $F$  ne dépend pas de  $x_1$  puisque l'équilibre doit être assuré partout. Près des mors l'éprouvette est plus large qu'en son centre donc  $S$  plus grand qu'en son centre. La contrainte moyenne de traction  $y$  est donc plus petite et la déformation  $\epsilon_1$  est donc aussi plus petite. Pour mieux estimer la déformation au centre, il convient donc de diviser par une longueur  $L_0$  plus petite que la distance initiale entre nus des mors. Il n'est pas possible d'avoir une bonne estimation quelle que soit le comportement du matériau. Il faut garder à l'esprit que cette façon de calculer la déformation sans extensomètre constitue une estimation.

La Fig. 2 illustre la répartition de la déformation longitudinale au voisinage des mordaches de la machine de traction pour une éprouvette de traction uniaxiale classique dont les bords à insérer dans les mordaches sont élargis. On constate effectivement un effet de bord et il faut s'en éloigner typiquement d'une largeur d'éprouvette pour rencontrer un champ quasiment uniforme (de couleur jaune sur la figure).

Les bords élargis permettent d'éviter une rupture prématurée au bord de la zone de fixation puisque dans cette zone la matière est étirée dans une direction et écrasée dans une autre direction perpendiculaire.

### 3. Essai de traction uniaxiale

#### 3.1. Questions

La Fig. 3 décrit un essai de traction uniaxiale selon  $\vec{z}$ . La surface de la section sur laquelle la force  $F$  est appliquée vaut  $S_0$ .

- 1 - définir le tenseur des contraintes dans le repère  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
- 2 - calculer le vecteur contrainte  $\vec{T}$  pour les directions  $\vec{n} = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  et  $\vec{t} = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .
- 3 - calculer le tenseur des déformations en élasticité linéaire isotrope.

#### 3.2. Réponses

- 1 - l'analyse des sollicitation sur chaque face donne

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F/S_0 \end{bmatrix}$$

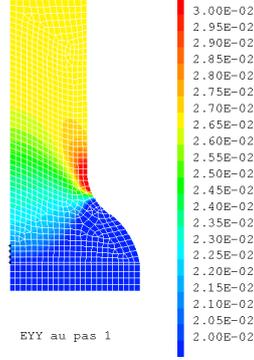


FIGURE 2: Répartition de la déformation longitudinale en traction uniaxiale. Modèle en contraintes planes par éléments finis en élasticité linéaire isotrope. Seul un quart de l'éprouvette est représentée pour raison de symétrie.

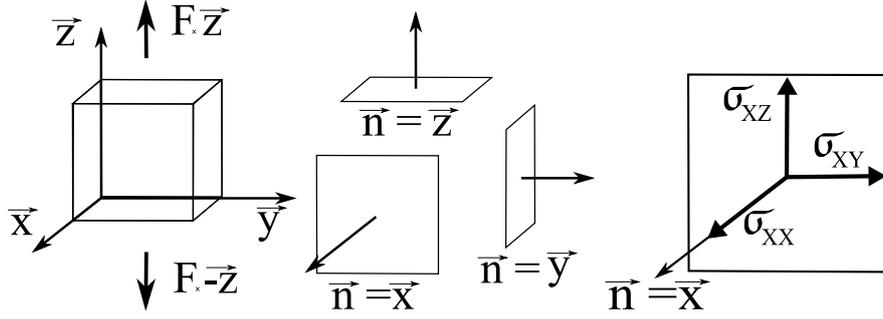


FIGURE 3: Traction uniaxiale et rappel des notations.

$$2 - \vec{T}_{\vec{n}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} \text{ donc } \vec{T}_{\vec{n}} = (0, 0, 1/\sqrt{2} \sigma_{zz}) = F/S_0(0, 0, 1/\sqrt{2}).$$

$$\vec{T}_{\vec{t}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{t} \text{ donc } \vec{T}_{\vec{t}} = (0, 0, 1/\sqrt{2} \sigma_{zz}) = F/S_0(0, 0, 1/\sqrt{2}).$$

3 - la loi de comportement s'écrit

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}/E - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})/E & (1 + \nu)\sigma_{xy}/E & (1 + \nu)\sigma_{xz}/E \\ (1 + \nu)\sigma_{xy}/E & \sigma_{yy}/E - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})/E & (1 + \nu)\sigma_{yz}/E \\ (1 + \nu)\sigma_{xz}/E & (1 + \nu)\sigma_{yz}/E & \sigma_{zz}/E - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/E \end{bmatrix}$$

d'où

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} -\nu F/ES_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu F/ES_0 & 0 \\ 0 & 0 & F/ES_0 \end{bmatrix}$$

## 4. Cisaillement, distorsion, modules d'élasticité

### 4.1. Questions

La Fig. 4 décrit un cisaillement pur dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ .

- 1 - équilibrer le coin en haut à droite,
- 2 - en déduire qu'il s'agit d'une superposition de traction et compression à  $45^\circ$  de même intensité,
- 3 - déduire de cette superposition que cette sollicitation conserve le volume dans le cas de l'élasticité linéaire isotrope,
- 4 - relier la déformation de distorsion  $\gamma_{xy}$  aux allongement et raccourcissement à  $45^\circ$ ,
- 5 - en déduire la relation entre le module de cisaillement et les modules d'Young et coefficient de Poisson,

### 4.2. Réponses

1 - supposons un élément de volume carré de côtés  $dl$  et d'épaisseur 1 comme représenté sur la Fig. 4. Les longueurs des segments du coin valent  $dl$ ,  $dl$  et  $\sqrt{2}dl$ . Les forces agissant sur les faces sont :

$$\begin{array}{ll} \text{pour } \vec{n} = \vec{x} : & \sigma_{xy} dl \vec{y} \\ \text{pour } \vec{n} = \vec{y} : & \sigma_{xy} dl \vec{x} \\ \text{pour } \vec{n} = -1/\sqrt{2}\vec{x} - 1/\sqrt{2}\vec{y} : & T_x \sqrt{2} dl \vec{x} + T_y \sqrt{2} dl \vec{y} \end{array}$$

L'équilibre impose que la somme des forces soit égale au vecteur nul, i. e. que la somme des composantes selon  $\vec{x}$  soit nulle et que la somme des composantes selon  $\vec{y}$  soit nulle (il n'y a pas de composante selon  $\vec{z}$  dans ce cas particulier) :

$$\begin{array}{l} \sigma_{xy} dl + T_x \sqrt{2} dl = 0 \\ \sigma_{xy} dl + T_y \sqrt{2} dl = 0 \end{array}$$

On en déduit que  $T_x = -\sigma_{xy}/\sqrt{2}$  et que  $T_y = -\sigma_{xy}/\sqrt{2}$ . La composante normale de cette contrainte s'obtient en faisant le produit scalaire avec la direction normale à la facette, i. e. avec  $\vec{n} = -1/\sqrt{2}\vec{x} - 1/\sqrt{2}\vec{y}$  et la composante tangentielle dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$  en faisant le produit scalaire avec la direction parallèle à la facette  $\vec{t} = 1/\sqrt{2}\vec{x} - 1/\sqrt{2}\vec{y}$ .

- composante normale sur la facette définie par  $\vec{n}$  :

$$\sigma_{nn} = \vec{T}_{\vec{n}} \cdot \vec{n} \text{ i. e. } \sigma_{nn} = \sigma_{xy}$$

- composante normale sur la facette définie par  $\vec{t}$  :

$$\sigma_{nt} = \vec{T}_{\vec{n}} \cdot \vec{t} \text{ i. e. } \sigma_{nt} = 0$$

2 - en prenant ( $\vec{n} = -1/\sqrt{2}\vec{x} + 1/\sqrt{2}\vec{y}$ ) on montre que pour le coin inférieur droit la situation est la même au signe près. Si  $\sigma_{xy}$  est positif, alors la diagonale inclinée à  $45^\circ$  est en traction et la diagonale inclinée à  $-45^\circ$  est en compression. Traction et compression ont même intensité  $\sigma_{xy}$ .

3 - si une traction uniaxiale tend à faire augmenter le volume, une compression uniaxiale de même intensité tend à le diminuer d'autant, quelle que soit la direction de celles-ci dans un matériau isotrope puisque en élasticité linéaire on peut superposer les effets des sollicitations pour obtenir la somme des effets.

4 - la Fig. 5 montre les déplacements induits par la distorsion  $\gamma_{xy}$ . Par définition, le module de cisaillement  $\mu$  relie la contrainte de cisaillement à la distorsion, i. e.  $\sigma_{xy} \equiv \mu\gamma_{xy}$ . Le déplacement selon  $\vec{x}$  d'un point situé à une distance  $dl$  selon  $\vec{x}$  vaut donc  $dl \tan(\gamma_{xy}/2) \approx dl\gamma_{xy}/2$  puisque les déformations sont petites ( $\gamma_{xy} \ll 1$ ). De même pour le déplacement selon  $\vec{y}$ . La longueur de la diagonale vaut  $\sqrt{2} dl$  et l'allongement vaut  $(dl\gamma_{xy}/2\vec{x} + dl\gamma_{xy}/2\vec{y}) \cdot \vec{n} = \sqrt{2} dl\gamma_{xy}/2$ . La déformation vaut donc  $\epsilon_{nn} = \frac{\gamma_{xy}/2\sqrt{2} dl}{\sqrt{2} dl}$  donc  $\epsilon_{nn} = \gamma_{xy}/2$ .

5 - la déformation  $\epsilon_{nn}$  est le résultat d'une traction selon  $\vec{n}$  et d'une compression selon  $\vec{t}$ , toutes deux d'intensité  $\sigma_{xy}$ . On peut donc déduire la déformation de la superposition de ces deux sollicitations et il vient  $\epsilon_{nn} = \sigma_{nn}/E - (\nu/E)(\sigma_{tt}) = \sigma_{xy}/E - (\nu/E)(-\sigma_{xy}) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} = \gamma_{xy}/2$ . Comme  $\sigma_{xy} = \mu\gamma_{xy}$  nous pouvons en déduire que  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .

## 5. A propos de l'essai de compression

Les mécanismes d'accommodation de la déformation imposée changent de traction en compression. Non seulement la "limite élastique" peut être différente, comme par exemple dans le cas des polymères avec 10 à 20% d'écart entre traction et compression uniaxiales, mais cavitation et craquelage n'apparaissent généralement qu'en traction. C'est aussi le cas pour les bétons et roches dont le comportement est dit "unilatéral", i. e. différent en traction et compression. Les métaux quant à eux sont essentiellement sensibles au cisaillement et traction et compression donnent des résultats très voisins en petites déformations.

Contrairement à l'essai de traction uniaxiale, il n'est pas possible d'utiliser un échantillon de forme élancée en compression uniaxiale à cause du flambement, comme le montre la Fig. 6. On pourrait par ailleurs imaginer utiliser moins de matière en testant un petit dé de matière en compression. Dans ce cas, le frottement des faces en contact avec les plateaux de la presse induit un "fretage" et une déformation "en tonneau". Nous allons étudier les cas extrêmes où les dilatations transversales sont totalement empêchées et celui où elles sont libres. Ceci permet respectivement de se rapprocher de l'état de sollicitation au niveau des faces en contact et au niveau du centre.

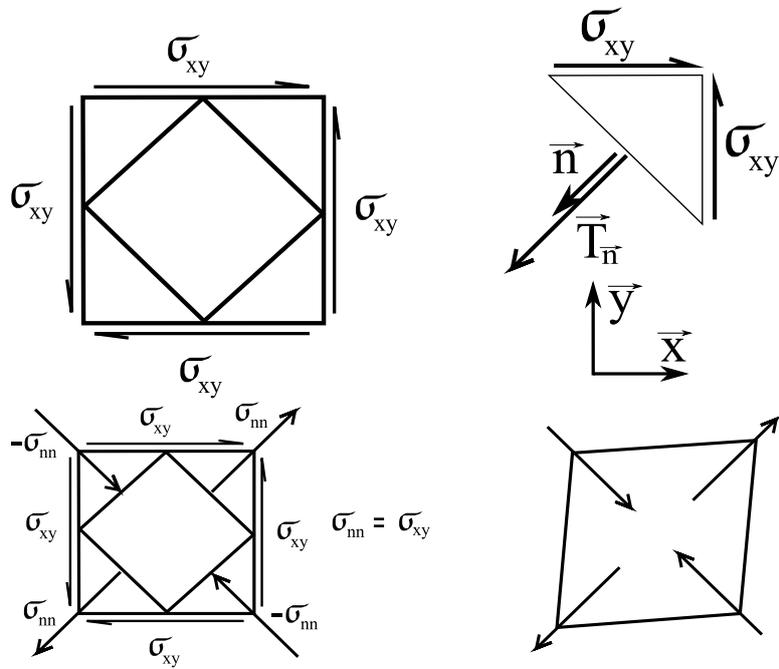


FIGURE 4: Cisaillement, conservation du volume en élasticité linéaire isotrope.

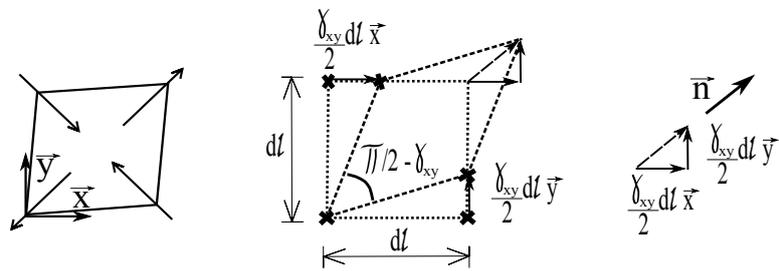


FIGURE 5: Cisaillement, relation entre  $\mu$ ,  $E$  et  $\nu$ .

Bien sûr, en pratique, la hauteur de l'échantillon doit assurer un bon compromis entre le risque de flambement - échantillon pas trop élancé - et une mesure suffisamment éloignée des bords.

### 5.1. Questions

On suppose le matériau élastique linéaire isotrope. On considère deux situations :

1 - Aux niveau des plateaux : on suppose que  $\epsilon_{xx} = 0$  et  $\epsilon_{yy} = 0$  et que  $\sigma_{zz} = F/S_0$ . Il est évident que l'on est dans le repère principal et donc tous les termes de cisaillement et distorsion sont nuls. Déterminer les tenseurs des déformations et des contraintes.

2 - Dans la zone centrale : on suppose que  $\sigma_{xx} = 0$  et  $\sigma_{yy} = 0$  et que  $\sigma_{zz} = F/S_0$ . Il est évident que l'on est dans le repère principal et donc tous les termes de cisaillement et distorsion sont nuls. Etablir le tenseur des contraintes et calculer le tenseur des déformations.

### 5.2. Réponses

1 - par raison de symétrie  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ . Nous noterons ces contraintes  $\sigma_{transv.} = \sigma_{xx} = \sigma_{yy}$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{transv.} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{transv.} & 0 \\ 0 & 0 & -F/S_0 \end{bmatrix}$$

La loi de comportement élastique linéaire isotrope impose que

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}/E - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})/E & (1 + \nu)/E\sigma_{xy} & (1 + \nu)/E\sigma_{xz} \\ (1 + \nu)/E\sigma_{xy} & \sigma_{yy}/E - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})/E & (1 + \nu)/E\sigma_{yz} \\ (1 + \nu)/E\sigma_{xz} & (1 + \nu)/E\sigma_{yz} & \sigma_{zz}/E - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/E \end{bmatrix}$$

## 6. Dilatations différentielles

### 6.1. Questions

La dilatation différentielle peut conduire à l'échec de la mise au point d'un matériau composite. Voyons comment et dans quelles mesures à l'aide d'un exemple simple. Supposons que deux plaques de matériaux identiques soient collées et que l'on chauffe l'ensemble pour l'amener à une température uniforme  $T_a$ . Ces plaques ont été assemblées à une température  $T_i$ . Le plan des plaques est  $(x, y)$  et  $\vec{z}$  l'axe qui traverse les couches. Comme l'indique la Fig. 8, hormis un effet de bord, on pourra considérer que les champs mécaniques sont uniformes. Nous noterons  $\epsilon_{transv.}$  et  $\sigma_{transv.}$  les déformations et contraintes dans le plan  $(x, y)$ . Pour des raisons évidentes de symétrie et d'invariance les cisaillements et distorsions sont nuls dans ce repère qui est un repère principal. En effet, il n'y a pas d'effort tendant à faire glisser

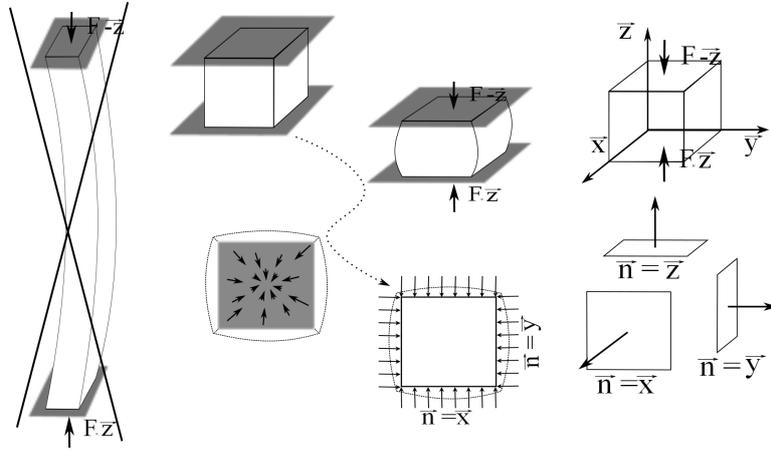


FIGURE 6: Essai de compression selon  $\vec{z}$ .

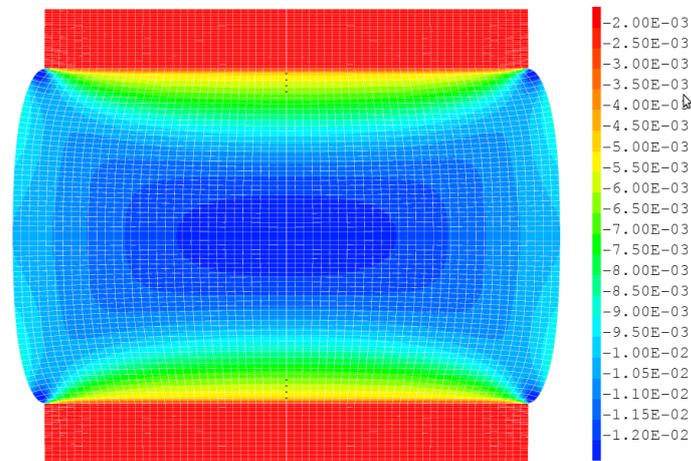


FIGURE 7: Calcul par éléments finis en élasticité linéaire isotrope, modèle axisymétrique. Compression moyenne de 1%, déformation amplifiée 30 fois, colorisation de la déformation longitudinale en compression. L'échantillon "souple" de matière comprimé ne glisse pas sur les plateaux rigides ce qui induit un champ de déformations non uniforme en compression uniaxiale. On appelle cela un "effet de frettage".

des parties par rapport à d'autres dans le plan. Exemples de notation : des contraintes dans la matériau 1 seront notées  $\sigma_{zz}^{mat1}$  et des déformations dans le matériau 2  $\epsilon_{transv.}^{mat2}$ .

1 - Que vaut les contrainte  $\sigma_{zz}$ ? Que peut-on dire du tenseur des contraintes?

2 - Formaliser la compatibilité des déformations.

3 - Relier les déformations aux contraintes.

4 - Formaliser l'équilibre global.

5 - Déterminer les contraintes dans les couches.

6 - Application numérique et vérification de la conformité de la solution aux hypothèses :  $h_1 = 2mm, h_2 = 0.2mm, T_i = 20^\circ C, T_a = 70^\circ C$

**acier**,  $E^{mat1} = 210GPa, \nu^{mat1} = 0.33, \alpha_L^{mat1} = 10^{-5} \text{ } ^\circ C^{-1}$ .

**colle**,  $E^{mat2} = 2GPa, \nu^{mat2} = 0.4, \alpha_L^{mat2} = 10^{-4} \text{ } ^\circ C^{-1}$ .

## 6.2. Réponses

1 - Les conditions aux limites sont telles que  $\sigma_{zz} = 0$ . Les cisaillements sont nuls et il n'y a pas de forces de volume (gravité, forces inertielles...) donc  $\vec{div} \underline{\underline{\sigma}} = \vec{0}$ . Étant donné que  $\sigma_{xy} = 0, \sigma_{xz} = 0$  et  $\sigma_{yz} = 0$ , il s'ensuit que  $\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = 0$  et  $\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0$ . Les contraintes  $\sigma_{transv.}$  sont donc uniformes dans le domaine et  $\sigma_{zz} = 0$ .

2 - Les déformations totales doivent être les mêmes, donc  $\epsilon_{transv.}^{mat1} = \epsilon_{transv.}^{mat2}$ . Ces déformations ont une origine thermique  $(T_a - T_i)\alpha_L^{mat1}$  et éventuellement une origine mécanique  $\epsilon_{transv.} = \frac{1-\nu}{E}\sigma_{transv.}$  pour pouvoir satisfaire aux compatibilités de déformations. Nous pouvons donc écrire que

$$(T_a - T_i)\alpha_L^{mat1} + \epsilon_{transv.}^{mat1} = (T_a - T_i)\alpha_L^{mat2} + \epsilon_{transv.}^{mat2}$$

où les termes  $\epsilon$  sont d'origine mécanique.

3 - La loi de Hooke donne dans ce cas pour les déformations d'origine mécanique, i. e. induites par des contraintes

$$\epsilon_{transv.}^{mat1} = \frac{1 - \nu^{mat1}}{E^{mat1}} \sigma_{transv.}^{mat1} \text{ et } \epsilon_{transv.}^{mat2} = \frac{1 - \nu^{mat2}}{E^{mat2}} \sigma_{transv.}^{mat2}$$

4 - L'ensemble se dilate et adopte une dilatation moyenne. Quelle est la loi de mélange pour la dilatation globale dans ce cas connaissant les propriétés de chaque matériau? Dans ce cas, il n'y aucune force extérieure appliquée. Les contraintes doivent donc être auto-équilibrées. En effet, si l'on imagine une coupure plane parallèle à  $\vec{z}$ , la résultante des contraintes doit donner une force nulle puisque la partie "coupée" n'exerce aucune force globale sur la partie "restante". Désignant par  $h_1/2, h_2$ , et  $h_1/2$  les épaisseur des couches, cela se traduit par

$$\int_0^{h_1/2} \sigma_{transv.}^{mat1} dz + \int_{h_1/2}^{h_1/2+h_2} \sigma_{transv.}^{mat2} dz + \int_{h_1/2+h_2}^{h_1+h_2} \sigma_{transv.}^{mat1} dz = 0$$

par unité de profondeur. Comme les contraintes sont uniformes, cela se résume à  $\sigma_{transv.}^{mat1} h_1 + \sigma_{transv.}^{mat2} h_2 = 0$  d'où  $\sigma_{transv.}^{mat2} = \frac{-h_1}{h_2} \sigma_{transv.}^{mat1}$ .

5 - Il est maintenant possible de déterminer les contraintes transversales en utilisant les résultats précédents

$$(T_a - T_i) \alpha_L^{mat1} + \frac{1 - \nu^{mat1}}{E^{mat1}} \sigma_{transv.}^{mat1} = (T_a - T_i) \alpha_L^{mat2} + \frac{1 - \nu^{mat2}}{E^{mat2}} \frac{-h_1}{h_2} \sigma_{transv.}^{mat1}.$$

Ce qui donne finalement

$$\sigma_{transv.}^{mat1} = \frac{(T_a - T_i)(\alpha_L^{mat2} - \alpha_L^{mat1})}{\frac{1 - \nu^{mat1}}{E^{mat1}} + \frac{h_1}{h_2} \frac{1 - \nu^{mat2}}{E^{mat2}}} \text{ et } \sigma_{transv.}^{mat2} = \frac{-h_1}{h_2} \sigma_{transv.}^{mat1}.$$

On peut ensuite en déduire la déformation totale qui vaut  $\epsilon_{transv.}^{totale} = (T_a - T_i) \alpha_L^{mat1} + \frac{1 - \nu^{mat1}}{E^{mat1}} \sigma_{transv.}^{mat1}$ .

6 - Il est maintenant possible de déterminer les contraintes transversales en utilisant les résultats précédents

$$\sigma_{transv.}^{mat1} = \frac{50 * 9 * 10^{-5}}{\frac{0.67}{2.1 * 10^{11}} + \frac{2}{0.2} \frac{0.6}{2 * 10^9}} \approx 1.5 \text{ MPa}$$

Comme la colle se dilate bien plus que l'acier (facteur 10), elle met les plaques d'acier en traction lorsqu'on chauffe l'assemblage collé. Par ailleurs, nous avons mis en évidence que la contrainte dans la colle est aussi liée aux paramètres géométriques par le biais de l'équilibre global d'une section. Elle vaut  $\frac{-h_1}{h_2} \sigma_{transv.}^{mat1}$  soit environ -15 MPa en compression transversale.

On peut ensuite en déduire la déformation totale  $\epsilon_{transv.}^{totale} = 50 * 10^{-5} + \frac{0.67}{2.1 * 10^{11}} * 1.5 * 10^6 \approx 5 * 10^{-4} + 4.8 * 10^{-7}$ . On vérifie bien que la déformation dans la colle est identique  $\epsilon_{transv.}^{totale} \approx 50 * 10^{-4} - \frac{0.6}{2.0 * 10^9} * 1.5 * 10^7 = 5 * 10^{-4}$ . Le coefficient de dilatation moyen dans le plan  $(x, y)$  vaut  $\alpha_{Lmoyen(x,y)} = \epsilon_{transv.}^{totale} / 50 \text{ } ^\circ C$ . Comme on pouvait s'y attendre, on constate que tout se passe quasiment comme si la colle devait suivre la dilatation de l'acier. L'ordre de grandeur de la contrainte maximale admissible dans la colle est de l'ordre de 100 MPa à température ambiante. Cette contrainte maximale admissible diminue lorsque la température augmente<sup>1</sup>. Si l'on chauffe plus, toutes ces contraintes seront libérées par un décollement qui partira des bords comme le montre la Fig. 9. C'est un procédé classique utilisé pour séparer des éléments collés.

Les hypothèses des petites perturbations (h. p. p.) impliquent que l'on reste en petits déplacements et petites déformations, c'est à dire que l'on puisse assimiler l'état déformé à l'état initial et que l'on reste en élasticité linéaire. On a bien vérifié que c'est le cas ici.

---

1. Le problème peut se compliquer considérablement s'il faut prendre en compte les variations de propriétés mécaniques avec la température

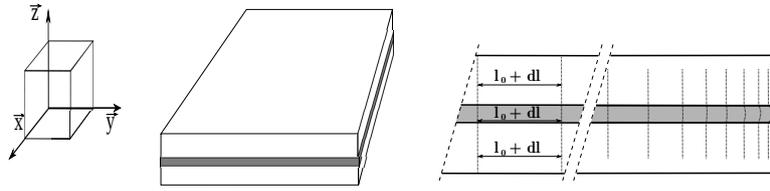


FIGURE 8: Assemblage de matériaux comme, par exemple, le collage.

Remarque : la dilatation de cet assemblage de matériaux isotropes est anisotrope et on peut à l'aide des résultats précédents aussi calculer la dilatation moyenne dans l'épaisseur et en déduire une "loi de mélange". La déformation totale  $\epsilon_{zz}^{totale}$  vaut  $\epsilon_{zz}^{mécanique} + \epsilon_{zz}^{thermique}$ . Dans notre cas où  $\sigma_{zz} = 0$  et  $\epsilon_{zz}^{mécanique} = -2\nu\sigma_{transv.}$  on obtient donc  $\epsilon_{zz} = (T_a - T_i)\alpha - 2\nu\sigma_{transv.}$ . La variation dimensionnelle selon  $\vec{z}$  s'obtient en intégrant la déformation, i. e.  $\Delta h = \int_0^{h_1+h_2} \epsilon_{zz}^{totale}(z) dz$ . La valeur à intégrer est constante par morceau d'où  $\Delta h = h_1 \epsilon_{zz}^{totale\ mat1} + h_2 \epsilon_{zz}^{totale\ mat2}$ . La dilatation moyenne vaut  $\langle \epsilon_{zz}^{totale} \rangle = \frac{\Delta h}{h_1+h_2}$ . Enfin, le coefficient de dilatation moyen selon  $\vec{z}$  vaut  $\langle \alpha_z \rangle = \frac{\langle \epsilon_{zz}^{totale} \rangle}{T_a - T_i}$ .

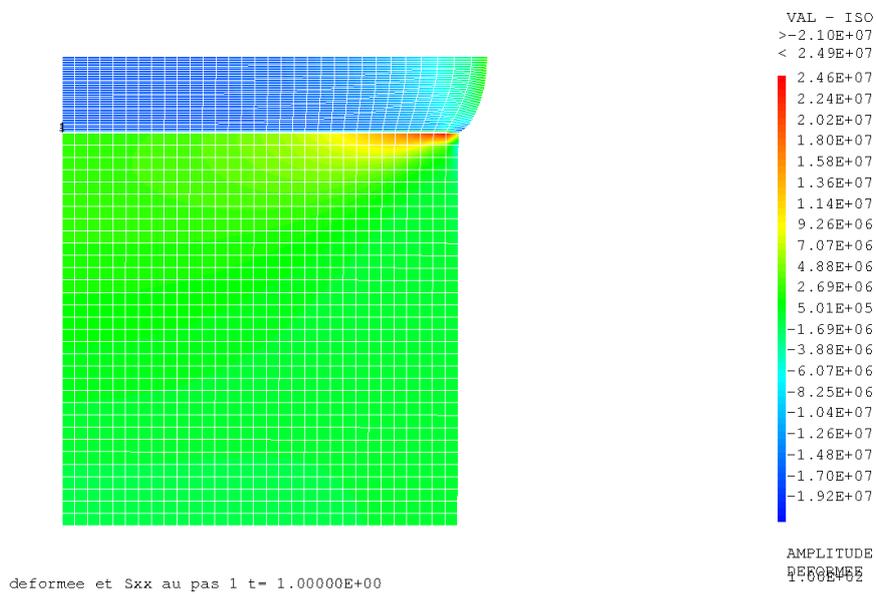


FIGURE 9: Calcul par éléments finis des effets de bords dans le cas de la dilatation différentielle acier/colle. Seule la moitié inférieure est représentée pour raison de symétrie. Une singularité apparaît au coin de l'acier et c'est probablement de là que se propagerait un décollement. On constate que très vite les champs deviennent quasiment uniformes lorsqu'on s'éloigne du bord- typiquement 3 fois l'épaisseur du joint de colle dans le cas considéré.