CORRECTION DE L'EXERCICE
DE MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS - SOLIDES DÉFORMABLES
Relation module de cisaillement, module d'Young et coefficient de Poisson

Christophe FOND
Université de Strasbourg, I.U.T Robert Schuman

1 Compression selon l'axe x

1.1 Déformation selon l'axe x

La contrainte s'exprime en N/m^2. $\epsilon_{xx} = -\tau/E$. $u_A = -L\tau/E$, $v_A = 0$.

1.2 Déformation selon l'axe y

$\epsilon_{yy} = \nu\tau/E$. $u_B = 0$. $v_B = \nu L\tau/E$.

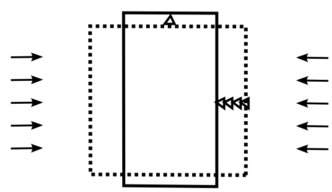

FIGURE 1 – Compression uniaxiale d'axe x, déformation très amplifiée, rapport $1/4 = 0.25 = \nu$ entre les déplacements des faces.

1.3 Transformation du carré

Le carré initial se transforme en rectangle, on peut raisonner par symétrie.

2 Traction selon l'axe y

2.1 Déformation selon l'axe y

$\epsilon_{yy} = \tau/E$. $u_B = 0$. $v_B = L\tau/E$.

2.2 Déformation selon l'axe x

$\epsilon_{xx} = -\nu\tau/E$. $u_A = -\nu L\tau/E$, $v_A = 0$.

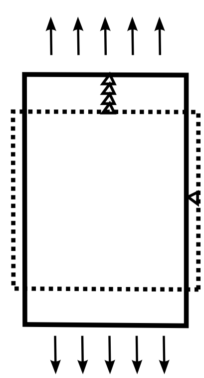

FIGURE 2 – Traction uniaxiale d'axe y, déformation très amplifiée, rapport $1/4 = 0.25 = \nu$ entre les déplacements des faces.

2.3 Transformation du carré

Le carré initial se transforme en rectangle.

3 Compression et traction simultanées

3.1 Facette à 45 degrés

Calculez le vecteur contrainte $\overrightarrow{T} = (-\sqrt{2}/2\tau, \sqrt{2}/2\tau, 0)$. Le produit scalaire $\overrightarrow{T}.\overrightarrow{n} = 0$ indique que ces deux vecteurs sont perpendiculaires. Il n'y a donc pas de contrainte normale.

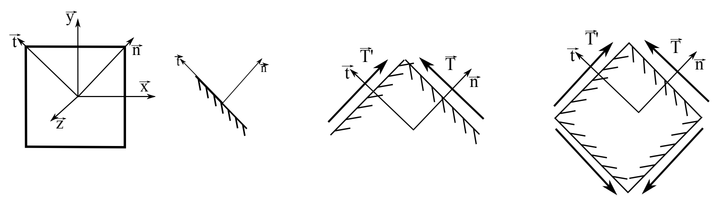

Figure 3 – Vecteurs contrainte sur des facettes orientées à 45 degrés.

3.2 Facette à 135 degrés

$\overrightarrow{T'} = (-\sqrt{2}/2\tau, \sqrt{2}/2\tau, 0)$. Le produit scalaire $\overrightarrow{T}.\overrightarrow{t} = 0$ indique que ces deux vecteurs sont perpendiculaires. Il n'y a donc pas de contrainte normale. Bien sûr chaque facette opposée est soumise au vecteur contrainte opposé.

3.3 État de contrainte

Comme il n'y à aucune contrainte normale sur les facettes orientée par $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{t}$ il ne peut s'agir que de cisaillement pur dans le repère $(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{t}, \overrightarrow{z})$.

$$\textit{état de contrainte } \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -\tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n,t,z)}$$

Le même état de contrainte est représenté différemment dans deux repères différents. Remarquons que le repère $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ est le repère principal, i. e. toutes les valeurs sont nulles hors diagonale.

3.4 Déformées

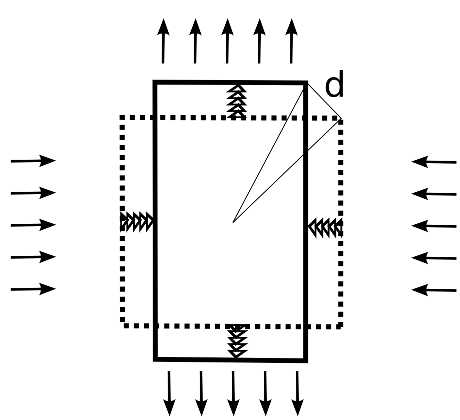

Figure 4 – Compression et traction simultanées, déformation très amplifiée.

4 Expression de μ à partir de E et ν

4.1 Distorsion d'angle γ

Le vecteur déplacement de C vaut u_c, v_c, w_c où $u_c = -L\tau(1+\nu)/E$, $v_c = +L\tau(1+\nu)/E$ et $w_c = 0$, en supposant bien sûr que C est dans le plan $z = 0$. La distance d vaut donc $\sqrt{u_c * u_c + v_c * v_c} = \sqrt{2}L\tau(1+\nu)/E$. La distance de O à C vaut $\sqrt{2}L$. Il vient $tan(\gamma/2) = d/\sqrt{2}L = \tau(1+\nu)/E$ d'où $\gamma/2 \approx \tau(1+\nu)/E$ au premier ordre.

4.2 Relation μ, E et ν

Si le module de cisaillement, noté μ ou G selon les auteurs, est défini par $\tau = \mu\gamma$ alors on identifie aisément à partir de l'égalité précédente $G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

4.3 Remarque sur la distorsion

Un cisaillement pur tel que décrit ci-avant conservera l'angle droit entre $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ seulement. Toute "croix" dessinée dans un autre repère que ce repère dit "principal" se verra distordue par cette déformation. Seule une contrainte hydrostatique $\sigma_{xx} = -p, \sigma_{yy} = -p, \sigma_{zz} = -p, \sigma_{xy} = 0, \sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0$, conservera l'angle droit quelles que soient les directions.