

NOTIONS D'HOMOGENEISATION
EN MÉCANIQUE DES SOLIDES
petites perturbations

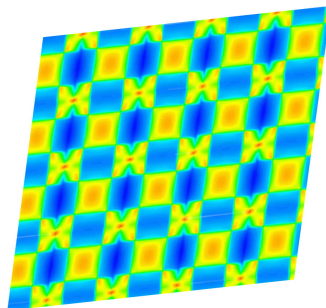
Christophe Fond

Université de Strasbourg
Christophe.Fond@unistra.fr

Résumé

Ce cours est une introduction à l'homogénéisation. Son objectif est de montrer que l'on peut parfois estimer les propriétés de mélange de matériaux. Deux approches sont illustrées, l'une analytique et l'autre numérique.

Mots clefs: mécanique, milieu continu, solide déformable, homogénéisation, élasticité, module de cisaillement, déformation, loi de comportement, mélange de matériaux



Modélisation d'un milieu périodique bi-dimensionnel sous sollicitation de cisaillement.

Table des matières

1	Préambule	3
2	Introduction	3
2.1	Problématique	3
2.2	Échelles	3

3	Théorèmes de l'énergie	3
3.1	Démonstration	4
4	Bornes analytiques de Voigt et Reuss	5
4.1	Borne de Voigt	6
4.2	Cas de l'élasticité linéaire isotrope	6
4.3	Borne de Reuss	7
5	Autres bornes et modèle	8
5.1	Exemple	8
6	Modèles numériques par éléments finis	8
6.1	Généralités	8
6.2	Exemple - cisaillement de mélanges d'élastomères	8
7	Conclusions	9
Annexe A	Énergie de déformation	11
Annexe A.1	Énergie de déformation en élasticité linéaire	11
Annexe A.2	Énergie de déformation en élasticité linéaire isotrope	12

1. Préambule

Ce cours présente les notions d'homogénéisation en Mécanique des Milieux Continus (M. M. C.). Il est recommandé de se reporter à des ouvrages plus complets pour approfondir ces notions [4] [3]. Je suggère au lecteur de "survoler" dans un premier temps les démonstrations théoriques.

2. Introduction

2.1. Problématique

On appelle "homogénéisation" l'art de prédire le comportement d'un milieu multiphasés à partir de la connaissance du comportement de chacune des phases. En milieux continus cela peut concerner des mélanges de solides aussi bien qu'un mélange de fluide et de solide. Par exemple, le célèbre Einstein fut l'un des pionniers de cette discipline en modélisant la viscosité d'un fluide comportant des particules sphériques solides [1].

2.2. Échelles

À l'échelle des atomes ou des molécules, on ne peut pas considérer la matière comme un milieu continu. Cela constitue une première limitation aux approches présentées ci-après. Une seconde est liée aux forces qui sont négligeables à grandes échelles et qui deviennent considérables à petites échelles. Il convient donc d'être certain que le comportement individuel utilisé pour les phases est bien celui supposé, généralement mesuré à une autre échelle que celle du mélange. La tension de surface est un exemple de force généralement négligeable à grandes échelles qui peut devenir considérable aux petites [6]. La notion d'échelle peut aussi intervenir lorsqu'on tente de prédire l'endommagement et la rupture [2].

3. Théorèmes de l'énergie

Afin de ne pas compliquer inutilement pour l'actuelle problématique, restreignons aux cas quasi-statiques. Rappelons que le principe de l'équilibre des forces et des moments postulé sur un élément de volume permet de démontrer que, pour tout champ $\underline{\underline{\sigma}}^\#$ statiquement admissible et tout champ \overrightarrow{D}^* cinématiquement admissible :

$$\int \int_{\partial\Omega} \{\overrightarrow{T}^\# \cdot \overrightarrow{D}^*\} d\partial\Omega + \int \int \int_{\Omega} \{\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{D}^*\} dx dy dz - \int \int \int_{\Omega} \{(\underline{\underline{\sigma}}^\# : \underline{\underline{\epsilon}}(\overrightarrow{D}^*))\} dx dy dz = 0$$

où \overrightarrow{f} désigne des forces de volume (la densité fois l'accélération de la pesanteur par exemple). $\underline{\underline{\sigma}}^\#$ et \overrightarrow{D}^* sont parfois appelés champs d'essai. Ils peuvent

différer de la solution exacte du problème de mécanique. Lorsqu'il s'agit de la solution exacte, on les note simplement $\underline{\underline{\sigma}}$ et \vec{D} . Le premier terme de cette l'équation concerne les conditions aux limites. Il convient de dissocier les parties du domaine $\partial\Omega$ où les conditions aux limites sont imposées en termes de vecteur contrainte \vec{T} de celles où elles sont imposées en termes de déplacements \vec{D} , respectivement $\partial\Omega_T$ et $\partial\Omega_D$. Notons que les admissibilités des champs $\underline{\underline{\sigma}}^\#$ et \vec{D}^* sont aussi liées au respect des conditions aux limites du problème. Là où les conditions aux limites sont définies, on impose forcément la solution exacte de sorte que certains termes du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}^\#$ peuvent correspondre à la solution exacte à la frontière $\partial\Omega$. Là où $\vec{T} = \underline{\underline{\sigma}}^\# \cdot \vec{n}_{sortante}$ est imposé \vec{D} ne l'est pas et réciproquement, i. e. $\partial\Omega_T \cap \partial\Omega_D = 0$.

Théorème des travaux virtuels

$$\int \int_{\partial\Omega_T} \{\vec{T} \cdot \vec{D}^*\} d\partial\Omega + \int \int_{\partial\Omega_D} \{\vec{T}^\# \cdot \vec{D}\} d\partial\Omega + \int \int \int_{\Omega} \{\vec{f} \cdot \vec{D}^*\} dx dy dz - \int \int \int_{\Omega} \{(\underline{\underline{\sigma}}^\# : \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{D}^*))\} dx dy dz = 0 \quad (1)$$

3.1. Démonstration

Restreignons la situation à l'élasticité linéaire et notons $\underline{\underline{\epsilon}}^* = \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{D}^*)$. Il faut d'abord démontrer une inégalité concernant le travail de déformation. Considérons le travail des efforts intérieurs du champ $(\underline{\underline{\sigma}}^\# - \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\epsilon}}^*)$ où $\underline{\underline{C}}$ est le tenseur des complaisance élastiques. Ce tenseur est symétrique de par l'existence d'un potentiel élastique [4] [3] [5]. Puisqu'il relie des tenseurs du second ordre, c'est un tenseur du quatrième ordre¹. Son inverse, appelé tenseur des souplesses, est noté $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{C}}^{-1}$. Le travail des efforts intérieurs est une forme quadratique donc positif ou nul.

$$\int \int \int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}}^\# - \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\epsilon}}^*) : \underline{\underline{S}} (\underline{\underline{\sigma}}^\# - \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\epsilon}}^*) dx dy dz \geq 0$$

Ce travail est nul lorsque $\underline{\underline{\sigma}}^\# = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\epsilon}}^*$, c'est à dire lorsque la loi de comportement est partout respectée. Dans ce cas, puisque les champs sont admissibles et qu'il s'agit de petites perturbations (donc d'élasticité linéaire), ces champs constituent l'unique solution exacte du problème d'élasticité.

1. $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$, $C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{jilk} = C_{jikl}$. En élasticité linéaire isotrope, deux modules d'élasticité indépendants suffisent pour définir le tenseur des complaisances. Par exemple le couple des module de compressibilité et de cisaillement suffit à le définir. De même, la donnée du couple module d'Young et coefficient de Poisson suffit aussi à le définir.

Puisque $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{C}}^{-1}$ et que $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}^T$, on peut développer l'équation précédente et affirmer que :

$$\int \int \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^{\#} : \underline{\underline{S}} \underline{\underline{\sigma}}^{\#} + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\epsilon}}^* : \underline{\underline{\epsilon}}^* - 2 \underline{\underline{\sigma}}^{\#} : \underline{\underline{\epsilon}}^* dx dy dz \geq 0 \quad (2)$$

En combinant l'équation 1 et l'inégalité 2 on obtient :

$$-\frac{1}{2} \int \int \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^{\#} : \underline{\underline{S}} \underline{\underline{\sigma}}^{\#} dx dy dz + \int \int_{\partial\Omega_D} \{\overrightarrow{T}^{\#} \cdot \overrightarrow{D}\} d\partial\Omega \leq$$

$$\frac{1}{2} \int \int \int_{\Omega} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\epsilon}}^* : \underline{\underline{\epsilon}}^* dx dy dz - \int \int_{\partial\Omega_T} \{\overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{D}^*\} d\partial\Omega - \int \int \int_{\Omega} \{\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{D}^*\} dx dy dz$$

Le second terme est appelé énergie potentielle d'un champ cinématiquement admissible, on le désignera par $V(\overrightarrow{D}^*)$. Le premier terme de l'inégalité est noté $-V(\underline{\underline{\sigma}}^{\#})$ et désigne l'opposé de l'énergie potentielle d'un champ statiquement admissible. Ces énergies potentielles sont égales lorsque les champs respectent partout la loi de comportement et dans ce cas ils correspondent à la solution exacte et unique du problème d'élasticité, i. e $V(\overrightarrow{D}) = -V(\underline{\underline{\sigma}})$. On aboutit donc à :

$$-V(\underline{\underline{\sigma}}^{\#}) \leq -V(\underline{\underline{\sigma}}) = V(\overrightarrow{D}) \leq V(\overrightarrow{D}^*) \quad (3)$$

Les théorèmes de l'énergie peuvent donc prendre pour expression :

- Parmi tous les champs d'essai cinématique admissibles, la meilleure solution est fournie par celui qui rend minimale l'énergie potentielle $V(\overrightarrow{D}^*)$.
 - Parmi tous les champs d'essai statiquement admissibles, la meilleure solution est fournie par celui qui rend minimale l'énergie potentielle $V(\underline{\underline{\sigma}}^{\#})$.
- L'énergie potentielle correspond à l'énergie de déformation moins le travail des efforts extérieurs. Le minimum de l'énergie potentielle minimale est obtenue pour la solution exacte.²

4. Bornes analytiques de Voigt et Reuss

Les bornes de Voigt et Reuss permettent de prédire dans quels intervalles vont se situer les modules d'élasticité pour un milieu hétérogène contenant des phases élastiques. En élasticité isotrope, il s'agit des modules de compressibilité K et de cisaillement μ . Ces bornes correspondent à des schémas de morphologie du matériau multiphasé en série et en parallèle.

2. Avec certaines méthodes numériques, on se rapproche de la solution d'un problème en minimisant l'énergie potentielle.

4.1. Borne de Voigt

Considérons un champ cinématiquement admissible $\underline{\underline{\epsilon}}^*$, associé à \overrightarrow{D}^* , et des conditions aux frontières telles que $\partial\Omega_T = 0$. La solution exacte est donnée par $\underline{\underline{\sigma}}^\# = \underline{\underline{\sigma}}$, associée à $\overrightarrow{T}^\# = \overrightarrow{T}$. Remarquons que la conservation de l'énergie aussi bien que le P. P. V. imposent que l'énergie élastique $W_{él.}$ soit égale à :

$$\frac{1}{2} \int \int \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{S}} \underline{\underline{\sigma}} \, dx dy dz = \frac{1}{2} \int \int_{\partial\Omega_D} \{ \overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{D} \} \, d\partial\Omega = W_{él.}$$

On peut donc reprendre l'inégalité 3 pour obtenir :

$$W_{él.} \leq \frac{1}{2} \int \int \int_{\Omega} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\epsilon}}^* : \underline{\underline{\epsilon}}^* \, dx dy dz \quad (4)$$

Considérons maintenant que ce champ $\underline{\underline{\epsilon}}^*$ est uniforme et vaut E^* partout. Il vient :

$$W_{él.} \leq \frac{1}{2} \underline{\underline{E}}^* : \underline{\underline{E}}^* \int \int \int_{\Omega} \underline{\underline{C}} \, dx dy dz \quad (5)$$

Désignons par A, B, C, ... les phases dont est constitué le mélange et $\underline{\underline{C}}_A, \underline{\underline{C}}_B, \underline{\underline{C}}_C, \dots$ les tenseurs de complaisances respectifs. Désignons par $\underline{\underline{V}}_{\Omega}$ le volume du domaine Ω . Les volumes des phases sont tels que $V_{\Omega} = V_A + V_B + V_C + \dots$. Les fractions volumiques sont définies par $f_A = \frac{V_A}{V_{\Omega}}, f_B = \frac{V_B}{V_{\Omega}}, f_C = \frac{V_C}{V_{\Omega}} \dots$ de sorte que $f_A + f_B + f_C + \dots = 1$. Il vient :

$$W_{él.} \leq \frac{1}{2} \underline{\underline{E}}^* : \underline{\underline{E}}^* (f_A \underline{\underline{C}}_A + f_B \underline{\underline{C}}_B + f_C \underline{\underline{C}}_C + \dots) \quad (6)$$

Comme à l'échelle macroscopique $W_{él.} = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}}^* : \underline{\underline{E}}^* \underline{\underline{C}}_{macro}$ où $\underline{\underline{C}}_{macro}$ désigne le tenseur des complaisances homogénéisé, c'est à dire le tenseur des complaisances moyen observé à grande échelles alors on peut affirmer que :

$$\frac{1}{2} \underline{\underline{E}}^* : \underline{\underline{E}}^* \underline{\underline{C}}_{macro} \leq \frac{1}{2} \underline{\underline{E}}^* : \underline{\underline{E}}^* (f_A \underline{\underline{C}}_A + f_B \underline{\underline{C}}_B + f_C \underline{\underline{C}}_C + \dots)$$

L'estimation constitue donc une borne supérieure de l'énergie. Les modules d'élasticité apparaissent dans la somme des contributions des sollicitations dans différentes directions. On se reportera à l'Annexe A pour les détails de cette somme. En supposant des sollicitations simples, par exemple σ_{11} non nul et tous les autres termes du tenseur nuls, on peut procéder à des estimations des modules.

4.2. Cas de l'élasticité linéaire isotrope

On considère désormais et pour toute la suite le cas de l'élasticité linéaire isotrope. On a montré en Annexe A que l'énergie de déformation dissocie les parts sphérique et déviatorique, i. e. compressibilité et cisaillement. On

peut donc dissocier l'énergie de déformation volumique de type $P\Delta V/V$ de celle due aux cisaillements de sorte que l'on obtient une surestimation du module de cisaillement μ et du module de compressibilité K . En reprenant l'équ. A.10, il vient :

Borne de Voigt

$$\begin{aligned} K_{macro} &\leq f_A K_A + f_B K_B + f_C K_C + \dots \\ \mu_{macro} &\leq f_A \mu_A + f_B \mu_B + f_C \mu_C + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

4.3. Borne de Reuss

Considérons un champ statiquement admissible $\underline{\underline{\sigma}}^\#$, associé à $\vec{T}^\#$, et des conditions aux frontières telles que $\partial\Omega_D = 0$. La solution exacte est donnée par $\underline{\underline{\epsilon}}^* = \underline{\underline{\epsilon}}$, associée à $\vec{D}^* = \vec{D}$. Remarquons que la conservation de l'énergie aussi bien que le P. P. V. imposent que l'énergie élastique $W_{él.}$ soit égale à :

$$\frac{1}{2} \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\epsilon}} dxdydz = \frac{1}{2} \int \int_{\partial\Omega_T} \{ \vec{T} \cdot \vec{D} \} d\partial\Omega = W_{él.}$$

On peut donc reprendre l'inégalité 3 pour obtenir :

$$W_{él.} \leq \frac{1}{2} \int \int \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^\# : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}^\# dxdydz \quad (8)$$

Considérons maintenant que ce champ $\underline{\underline{\sigma}}^\#$ est uniforme et vaut $\underline{\underline{\Sigma}}^\#$ partout. Désignons par V_Ω le volume du domaine Ω . Il vient :

$$W_{él.} \leq \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}}^\# : \underline{\underline{\Sigma}}^\# \int \int \int_{\Omega} \underline{\underline{S}} dxdydz \quad (9)$$

On obtient finalement :

$$W_{él.} \leq \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}}^\# : \underline{\underline{\Sigma}}^\# (f_A \underline{\underline{S}}_A + f_B \underline{\underline{S}}_B + f_C \underline{\underline{S}}_C + \dots) \quad (10)$$

Dans le cas isotrope, on obtient :

Borne de Reuss

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_{macro}} &\leq f_A \frac{1}{K_A} + f_B \frac{1}{K_B} + f_C \frac{1}{K_C} + \dots \\ \frac{1}{\mu_{macro}} &\leq f_A \frac{1}{\mu_A} + f_B \frac{1}{\mu_B} + f_C \frac{1}{\mu_C} + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

5. Autres bornes et modèle

Concernant l'élasticité linéaire, il existe d'autres modèles plus élaborés, par exemple les bornes de Hashin et Shtrikman, le modèle de l'inclusion d'Eshelby, le modèle auto-cohérent, etc. Les exposer ici dépasserait une simple introduction à la notion d'homogénéisation et il convient de se reporter aux ouvrages spécialisés pour approfondir, par exemple [3].

5.1. Exemple

On considère deux matériaux de type élastomère ou caoutchouc homogènes et isotropes dont les modules de cisaillement valent respectivement $\mu_A = 1 \text{ MPa}$ et $\mu_B = 3 \text{ MPa}$. Les modules de compressibilité sont supposés tous deux égaux à 2 GPa mais leurs valeurs n'affectent pas les bornes de Voigt et Reuss en ce qui concerne le cisaillement. On suppose que l'on est capable de constituer un mélange de ces deux matériaux en proportion de 50 % de chacun d'entre eux. Les interfaces sont supposées parfaites (pas de décohésion) et il n'y a pas de réaction physicochimique liée au mélange qui pourrait modifier les modules élastiques initiaux (telle qu'un effet "réticulant" par exemple).

$$\text{Borne de Voigt : } \mu_{\text{moy}} = 0.5\mu_A + 0.5\mu_B = 2.0 \text{ MPa}$$

$$\text{Borne de Reuss : } \mu_{\text{moy}} = \frac{1}{0.5/\mu_A + 0.5/\mu_B} = 1.5 \text{ MPa}$$

6. Modèles numériques par éléments finis

6.1. Généralités

Les modèles numériques sont aussi fréquemment utilisés dans le domaine de l'homogénéisation que les modèles analytiques. Ils permettent d'envisager plus aisément des morphologies complexes, voire aléatoires et des comportements non linéaires. La plupart du temps, sauf dans certains cas de morphologies aléatoires, on cherche à modéliser un milieu périodique. Il s'agit donc de pouvoir modéliser une "cellule" telle que sa géométrie et ses conditions aux limites autorisent un prolongement par périodicité. La Fig. 1 illustre le prolongement par périodicité de la Fig. 7.

6.2. Exemple - cisaillement de mélanges d'élastomères

Les modèles numériques par éléments finis présentés ici sont bi-dimensionnels. Ils simulent un glissement simple et on en déduit la raideur de l'ensemble. Par souci de simplicité plus que de réalisme, pour cette illustration les constituants sont des pavés répartis différemment pour considérer des morphologies de nature différentes. On traite le même exemple qu'en 5.1.

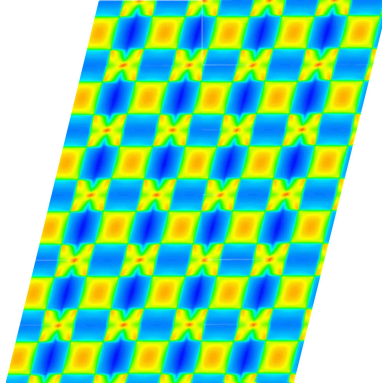


FIGURE 1: Modélisation d'un milieu périodique bi-dimensionnel sous sollicitation de cisaillement.

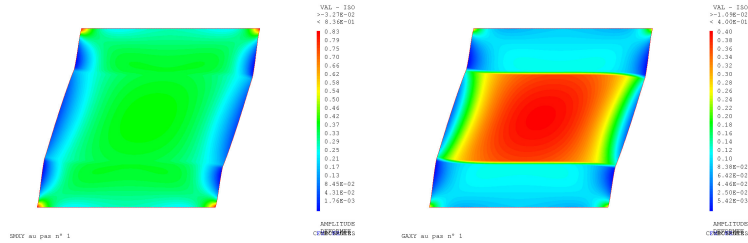


FIGURE 2: Modèle en série, à gauche la contrainte de cisaillement σ_{xy} et à droite la distorsion γ_{xy} . $\mu_{moy} = 1.50 MPa$.

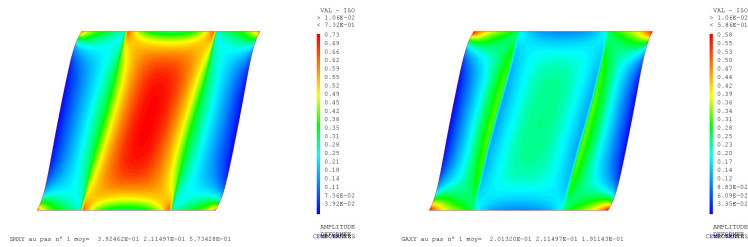


FIGURE 3: Modèle en parallèle, à gauche la contrainte de cisaillement σ_{xy} et à droite la distorsion γ_{xy} . $\mu_{moy} = 1.95 MPa$.

7. Conclusions

Il est possible d'estimer les propriétés, entre autres élastiques, de mélanges de matériaux. Il existe des modèles analytiques (bornes de Voigt et Reuss,...) permettant de faire des estimations. Les méthodes numériques peuvent aussi convenir pour faire des estimations lorsque les modèles analytiques atteignent leurs limites. En mécanique, ce sont les fractions volumiques qui pondèrent dans les lois de mélange et non les fractions massiques. Comme

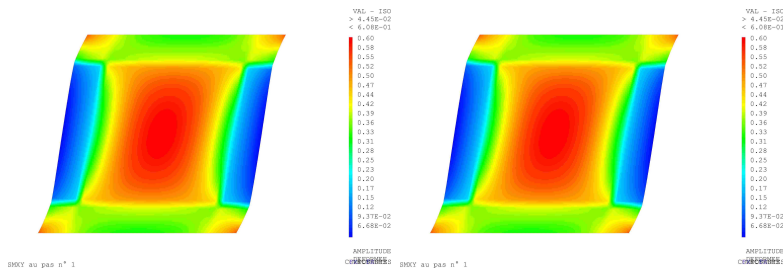


FIGURE 4: Inclusion : raide inclus dans souple, à gauche la contrainte de cisaillement σ_{xy} et à droite la distorsion γ_{xy} . $\mu_{moy} = 1.54 MPa$.

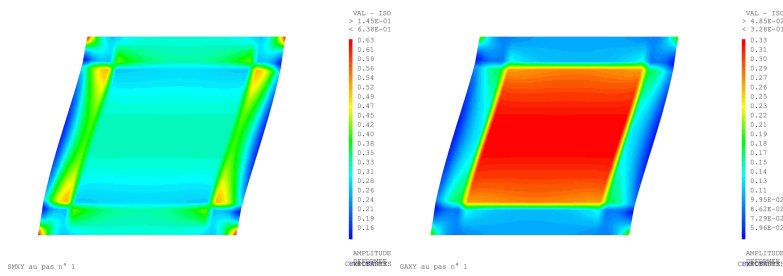


FIGURE 5: Inclusion : souple inclus dans raide, à gauche la contrainte de cisaillement σ_{xy} et à droite la distorsion γ_{xy} . $\mu_{moy} = 1.73 MPa$.

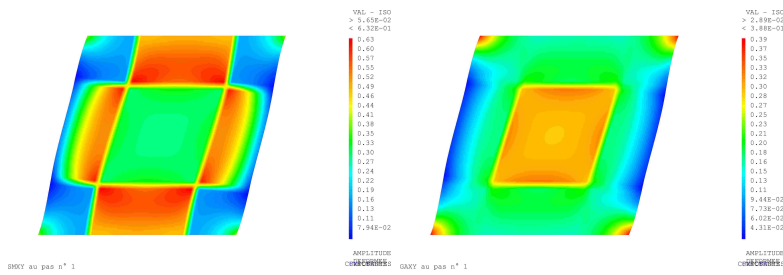


FIGURE 6: Damier 1, souple au centre, à gauche la contrainte de cisaillement σ_{xy} et à droite la distorsion γ_{xy} . $\mu_{moy} = 1.74 MPa$.

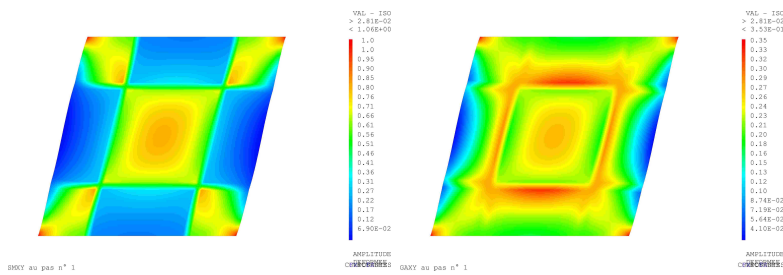


FIGURE 7: Damier 2, raide au centre, à gauche la contrainte de cisaillement σ_{xy} et à droite la distorsion γ_{xy} . $\mu_{moy} = 1.99 MPa$.

le montre la Table 1, les propriétés peuvent dépendre considérablement de la morphologie du matériau à plusieurs phases. Du fait de la dissociation des termes énergétiques liés à la variation de volume et à la distorsion, les modules estimés en élasticité linéaire isotrope sont les module de compressibilité et de cisaillement.









Désignation	Morphologie	$\mu_{moy}[MPa]$
Reuss		1.50
Voigt		2.00
série		1.50
parallèle		1.95
inclu 1		1.54
inclu 2		1.73
damier 1		1.74
damier 2		1.99

TABLE 1: Modules de cisaillement moyen pour un ratio $\mu_A/\mu_B = 3$ entre les matériaux et 50% de fractions volumiques. Calculs théoriques et estimations par éléments finis.

Annexe A. Énergie de déformation

Annexe A.1. Énergie de déformation en élasticité linéaire

Le produit tensoriel contracté de $\underline{\underline{\sigma}}$ avec $\underline{\underline{\epsilon}}$ fournit l'énergie de déformation élastique $W_{él} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}}$.

$$W_{él.} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (\text{A.1})$$

où $\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \epsilon_{kl}$. On obtient donc :

$$W_{él.} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad (\text{A.2})$$

de même, comme $\epsilon_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 S_{ijkl} \sigma_{kl}$:

$$W_{él.} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (\text{A.3})$$

Annexe A.2. Énergie de déformation en élasticité linéaire isotrope

Deux constantes matériaux indépendantes suffisent à caractériser l'élasticité linéaire isotrope. Les couples classiques utilisés selon les commodités d'usage sont (E, ν) , module d'Young et coefficient de Poisson, ou (λ, μ) , coefficients de Lamé, ou encore (K, μ) , module de compressibilité et module de cisaillement. Notons que ce dernier est parfois désigné par G .

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 2\mu\epsilon_{11} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) & 2\mu\epsilon_{12} & 2\mu\epsilon_{13} \\ 2\mu\epsilon_{12} & 2\mu\epsilon_{22} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) & 2\mu\epsilon_{23} \\ 2\mu\epsilon_{13} & 2\mu\epsilon_{23} & 2\mu\epsilon_{33} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}/E - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})/E & (1 + \nu)\sigma_{12}/E & (1 + \nu)\sigma_{13}/E \\ (1 + \nu)\sigma_{12}/E & \sigma_{22}/E - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})/E & (1 + \nu)\sigma_{23}/E \\ (1 + \nu)\sigma_{13}/E & (1 + \nu)\sigma_{23}/E & \sigma_{33}/E - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})/E \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Notons que les tenseurs des contraintes et des déformations peuvent se décomposer en parties sphérique et déviatorique. La partie sphérique est associée à la contrainte hydrostatique σ_h ("pression" hydrostatique) et à la variation de volume $\frac{\Delta V}{V}$ tandis que la partie déviatorique est associée au cisaillements et distorsions. Le contrainte hydrostatique est la moyenne des contraintes normales :

$$\sigma_h = Tr[\underline{\underline{\sigma}}]/3 = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3 \quad (\text{A.6})$$

La variation de volume est la somme des déformations normales :

$$\epsilon_h = Tr[\underline{\underline{\epsilon}}] = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \Delta V/V \quad (\text{A.7})$$

Les parts déviatoriques sont extraites en soustrayant les parts sphériques.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3 & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3 & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\sigma_{11} - \sigma_{22})/3 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})/3 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - \sigma_{11})/3 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})/3 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33} - \sigma_{11})/3 + (\sigma_{33} - \sigma_{22})/3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

le deuxième terme fait apparaître les cisaillements. En effet, par exemple, le terme de la première ligne $(\sigma_{11} - \sigma_{22})/3$ s'associe au terme opposé $(\sigma_{22} - \sigma_{11})/3$ de la deuxième ligne pour constituer une contrainte de cisaillement dans le plan (1, 2) qui s'ajoute à σ_{12} . De même pour les déformations :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33})/3 & 0 & 0 \\ 0 & (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33})/3 & 0 \\ 0 & 0 & (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33})/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\epsilon_{11} - \epsilon_{22})/3 + (\epsilon_{11} - \epsilon_{33})/3 & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & (\epsilon_{22} - \epsilon_{11})/3 + (\epsilon_{22} - \epsilon_{33})/3 & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & (\epsilon_{33} - \epsilon_{11})/3 + (\epsilon_{33} - \epsilon_{22})/3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Revenons au calcul de l'énergie de déformation :

$$2W_{\acute{e}l.} = \sigma_{11}\epsilon_{11} + \sigma_{22}\epsilon_{22} + \sigma_{33}\epsilon_{33} + 2\epsilon_{12}\sigma_{12} + 2\epsilon_{13}\sigma_{13} + 2\epsilon_{23}\sigma_{23}$$

En reportant les expressions des équ. A.4 et A.7, on obtient :

$$2W_{\acute{e}l.} = \epsilon_{11}(2\mu\epsilon_{11} + \lambda\Delta V/V) + \epsilon_{22}(2\mu\epsilon_{22} + \lambda\Delta V/V) + \epsilon_{33}(2\mu\epsilon_{33} + \lambda\Delta V/V) \\ + 4\mu(\epsilon_{12}\epsilon_{12} + \epsilon_{13}\epsilon_{13} + \epsilon_{23}\epsilon_{23})$$

En faisant apparaître les termes sphériques et déviatoriques on obtient :

$$2W_{\acute{e}l.} = \frac{2\mu + 3\lambda}{3}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33})\frac{\Delta V}{V} \\ + \frac{2\mu}{3}[(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + (\epsilon_{11} - \epsilon_{33})^2 + (\epsilon_{33} - \epsilon_{22})^2] + 4\mu(\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{13}^2 + \epsilon_{23}^2)$$

D'où la décomposition suivante qui fait clairement apparaître la dissociation d'un terme associé à la variation de volume et au module de compressibilité et d'un terme lié aux distorsions et au module de cisaillement.

$$W_{\acute{e}l.} = K\frac{\Delta V^2}{2V} + 2\mu\left[\frac{1}{6}((\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + (\epsilon_{11} - \epsilon_{33})^2) \right. \\ \left. + (\epsilon_{33} - \epsilon_{22})^2 + (\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{13}^2 + \epsilon_{23}^2)\right] \quad (\text{A.10})$$

On obtient de même avec les termes du tenseur des contraintes :

$$W_{\acute{e}l.} = \frac{\sigma_h^2}{2K} + \frac{1}{2\mu}\left[\frac{1}{6}((\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2) \right. \\ \left. + (\sigma_{33} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2\right] \quad (\text{A.11})$$

On notera que l'énergie élastique de cisaillement a quelque chose à voir avec la contrainte équivalente de von Mises...

Références

- [1] Einstein, A., 1906. Eine neue bestimmung der molekul dimensionen (a new determination of molecular dimensions). Annalen der Physik 2, 289–306.
- [2] Fond, C., Lobbrecht, A., Schirrer, R., 1996. Polymers toughened with rubber microspheres : an analytical solution for stresses and strains in the rubber particles at equilibrium and rupture. International Journal of Fracture 77, 141–159.
- [3] François, D., Pineau, A., Zaoui, A., 1991. Comportement mécanique des matériaux. vol. 1. Traité des nouvelles technologies, Hermès, Paris. Index.

- [4] Germain, P., Muller, P., 1995. Introduction à la mécanique des milieux continus. Masson. second edition.
- [5] Lemaitre, J., Jean-Louis, C., 1988. Mécanique des matériaux solides. Dunod. second edition.
- [6] Paliarne, J.F., 1991. Linear rheology of viscoelastic emulsions with interfacial tension. *Rheologica Acta* 29, 204–214.