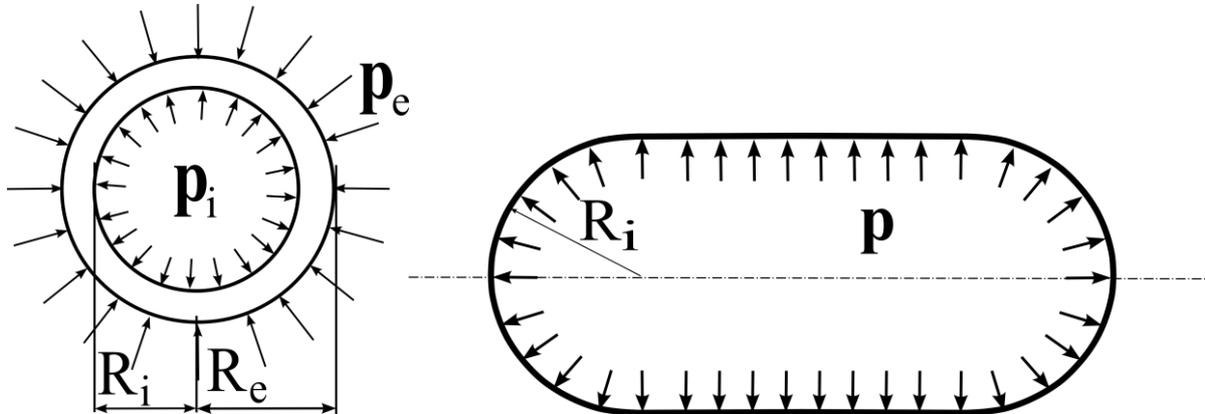


A propos des « formules du chaudronnier »

Christophe Fond – Université de Strasbourg

1. Tuyaux et réservoirs sous pression



Cylindre ou sphère sous pressions - Réservoir sous pression p.

1.1. Cylindre sous pression

Considérons un réservoir cylindrique ou un tube ou tuyau sous pression. La pression interne vaut p_i , la pression vaut p_e , le rayon interne est noté R_i et le rayon externe est noté $R_e = R_i + e$, e désignant l'épaisseur de la paroi. Nous utiliserons des coordonnées cylindriques (r, θ, z) avec bien sûr comme origine le centre du cylindre. Résoudre le problème en élasticité linéaire, petites déformations et petits déplacements, i. e. sous l'hypothèse des petites perturbations (h. p. p.). Considérez ensuite des parois de petites épaisseurs, i. e. $e \ll R_i$, et proposez une solution approximative ainsi qu'un équilibre associé.

Opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques :

$$x_1 = r \cos \theta$$

$$x_2 = r \sin \theta$$

$$x_3 = z$$

$$\underline{\text{grad}} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_r}{\partial r} & \frac{\partial U_r}{r \partial \theta} - \frac{U_\theta}{r} & \frac{\partial U_r}{\partial z} \\ \frac{\partial U_\theta}{\partial r} & \frac{\partial U_\theta}{r \partial \theta} + \frac{U_r}{r} & \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial U_z}{\partial r} & \frac{\partial U_z}{r \partial \theta} & \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \end{bmatrix}$$

Solution

Les conditions d'axisymétrie permettent de considérer un problème plan pour lequel les contraintes σ_{rz} , $\sigma_{\theta z}$, $\sigma_{r\theta}$ sont nulles et donc les déformations ε_{rz} , $\varepsilon_{\theta z}$, $\varepsilon_{r\theta}$ le sont aussi. Dans le cas des déformations planes ($\varepsilon_{zz} = 0$), les déplacements sont uniquement radiaux et ne dépendent que de r donc $U_r = f(r)$, $U_\theta = 0$ et $U_z = 0$. Dans le cas des contraintes planes ($\sigma_{zz} = 0$), les déplacements sont tels que $U_r = f(r)$, $U_\theta = 0$ et $U_z = C z + D$ puisque ε_{zz} ne dépend que de r .

Les conditions aux limites du problème sont donc $\sigma_{rr}(R_i) = -p_i$ et $\sigma_{rr}(R_e) = -p_e$.

L'équilibre impose que $\underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{0}$, ce qui conduit à $\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$.

Les déformations se déduisent des déplacements puisque $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \mathbf{U} + \underline{\text{grad}}^T \mathbf{U})$ ce qui conduit à $\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r}$, $\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{U_r}{r}$ et $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}$.

La loi de comportement impose que :

$$\sigma_{rr} = 2\mu \varepsilon_{rr} + \lambda (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\mu \varepsilon_{\theta\theta} + \lambda (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz})$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu \varepsilon_{zz} + \lambda (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz})$$

Si l'on combine les équations précédentes, l'équilibre impose que :

$$(2\mu + \lambda) \left(\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{\partial U_r}{r \partial r} - \frac{U_r}{r^2} \right) = 0$$

Cette équation différentielle accepte une solution de la forme $U_r = A r + \frac{B}{r}$. Les conditions aux limites permettent d'identifier les constantes A et B. On obtient :

$$A = \frac{2\mu + \lambda}{2\mu (2\mu + 3\lambda)} \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2\mu} \frac{(p_i - p_e) R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}$$

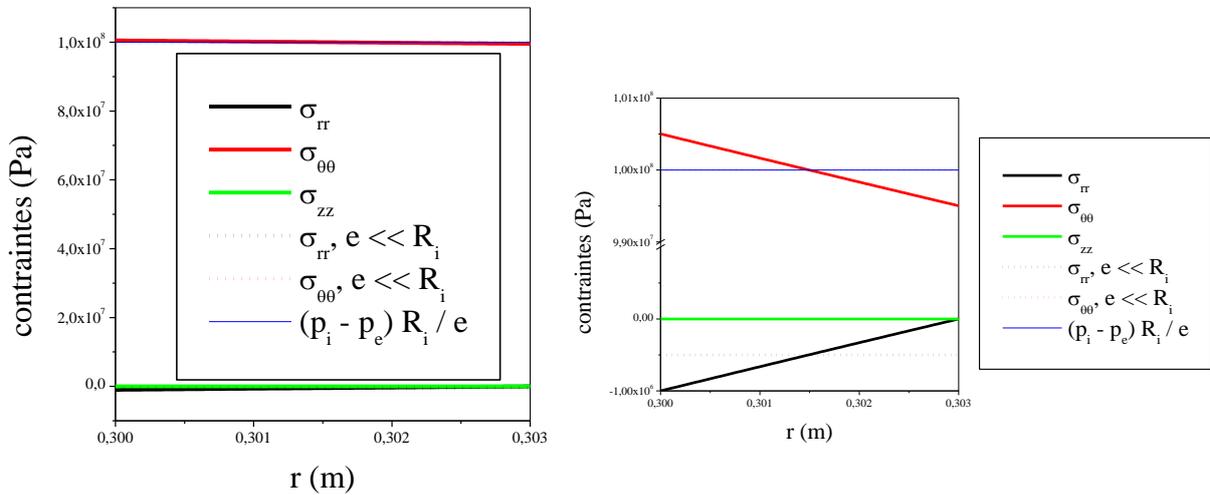
Les contraintes sont donc distribuées selon :

$$\sigma_{rr} = \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} - \frac{(p_i - p_e) R_i^2 R_e^2}{(R_e^2 - R_i^2) r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} + \frac{(p_i - p_e) R_i^2 R_e^2}{(R_e^2 - R_i^2) r^2}, \quad \sigma_{zz} = 0$$

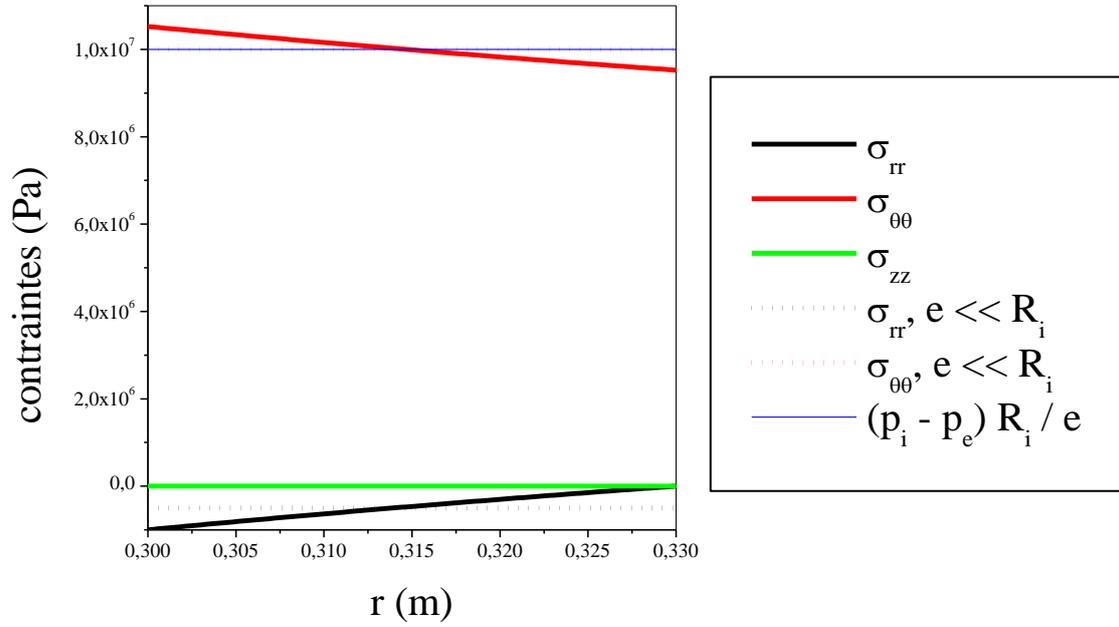
Dans le cas des déformations planes ($\varepsilon_{zz} = 0 = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zz} - \frac{1}{E} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$), les expressions précédentes demeurent inchangées sauf bien sûr pour σ_{zz} qui vaut :

$$\sigma_{zz} = \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{2\nu}{1+\nu} \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}$$

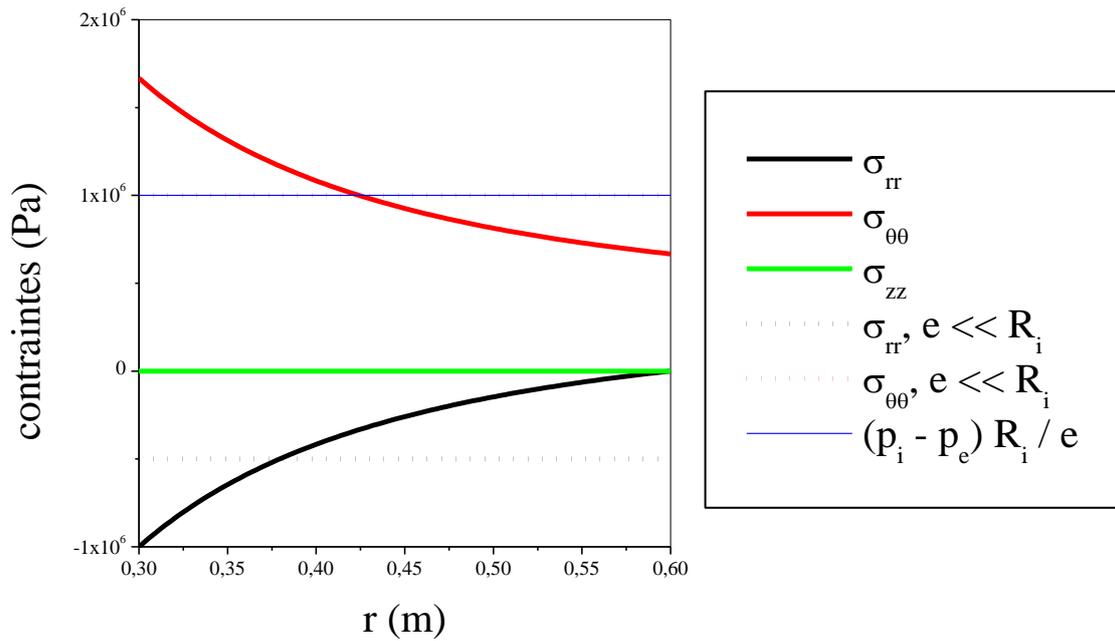
Les graphes suivants illustrent le domaine de validité des approximations pour $p_i = 1 \text{ MPa}$, $p_e = 0$ et $\nu = 0.33$. σ_{rr} varie évidemment de -1 MPa à 0 .



Distribution des contraintes, solution exacte et solutions approchées pour parois mincies pour $e = 0.01 R_i$. $\sigma_{\theta\theta}$ varie de 100.5 MPa à 99.5 MPa .



Distribution des contraintes, solution exacte et solutions approchées pour parois mincies pour $e = 0.1 R_i$. $\sigma_{\theta\theta}$ varie de 10.52 MPa à 9.52 MPa.



Distribution des contraintes, solution exacte et solutions approchées pour parois mincies pour $e = 1 R_i$. $\sigma_{\theta\theta}$ varie de 1.67 MPa à 0.67 MPa.

Cas où $e \ll R_i$:

Dans le cas de paroi de faible épaisseur, les équations précédentes admettent des approximations très convenables. Posons $R = \frac{R_i + R_e}{2}$, il vient :

$$R_i^2 \approx R^2 - e R \quad R_e^2 \approx R^2 + e R \quad R_e^2 - R_i^2 \approx 2 e R \quad R_e^2 R_i^2 \approx R^4$$

$$\sigma_{rr} \approx -\frac{p_i + p_e}{2} + \frac{(p_i - p_e) R}{2 e} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \quad , \quad \sigma_{\theta\theta} \approx -\frac{p_i + p_e}{2} + \frac{(p_i - p_e) R}{2 e} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)$$

On remarque que $(1 - \frac{R^2}{r^2}) \approx 0$, $(1 + \frac{R^2}{r^2}) \approx 2$ et que , sauf cas particulier où $p_i \approx p_e$,

$$|\frac{p_i + p_e}{2}| \ll |\frac{(p_i - p_e) R}{2 e}| (1 + \frac{R^2}{r^2})$$

Il est donc possible de considérer une approximation supplémentaire en négligeant le terme σ_{rr} devant $\sigma_{\theta\theta}$ puis de calculer $\sigma_{\theta\theta}$ à partir de p_i , p_e , R_i et e en posant :

$$\sigma_{\theta\theta} \approx \frac{(p_i - p_e) R_i}{e}$$

Dans cette expression, on considère que la contrainte tangente est constante dans l'épaisseur. Il convient de considérer R_i pour satisfaire à l'équilibre du schéma suivant.

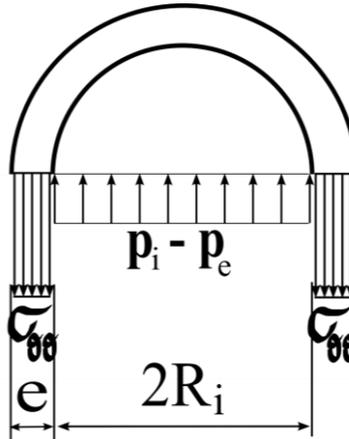


Schéma d'équilibre fournissant une excellente approximation pour les parois minces.

1.2. Sphère sous pression

Faites de même que précédemment pour une sphère. En utilisant des coordonnées sphériques (r, θ, φ) avec bien sûr comme origine le centre de la sphère.

Opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques :

$$x_1 = r \sin\varphi \cos\theta$$

$$x_2 = r \sin\varphi \sin\theta$$

$$x_3 = r \cos\varphi$$

$$\underline{\text{grad}} U = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_r}{\partial r} & \frac{\partial U_r}{r \sin\varphi \partial \theta} - \frac{U_\theta}{r} & \frac{\partial U_r}{r \partial \varphi} - \frac{U_\varphi}{r} \\ \frac{\partial U_\theta}{\partial r} & \frac{\partial U_\theta}{r \sin\varphi \partial \theta} + \frac{U_r}{r} + \frac{U_\varphi}{r} \cot\varphi & \frac{\partial U_\theta}{r \partial \varphi} \\ \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} & \frac{\partial U_\varphi}{r \sin\varphi \partial \theta} - \frac{U_\theta}{r} \cot\varphi & \frac{\partial U_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{U_r}{r} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{div}} \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{r \sin\varphi \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{r \partial \varphi} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\sigma_{r\varphi} \cot\varphi}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{r \sin\varphi \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{r \partial \varphi} + \frac{3\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{2\sigma_{\theta\varphi} \cot\varphi}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{r \sin\varphi \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{r \partial \varphi} + \frac{3\sigma_{r\varphi}}{r} + \frac{(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}) \cot\varphi}{r} \end{bmatrix}$$

Solution

Si l'on combine les équations précédentes, l'équilibre impose que :

$$(2\mu + \lambda) \left(\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial U_r}{r \partial r} - 2 \frac{U_r}{r^2} \right) = 0$$

Cette équation différentielle accepte une solution de la forme $U_r = A r + \frac{B}{r^2}$. Les conditions aux limites permettent d'identifier les constantes A et B. On obtient :

$$A = \frac{1}{2\mu + 3\lambda} \frac{p_i R_i^3 - p_e R_e^3}{R_e^3 - R_i^3} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{4\mu} \frac{(p_i - p_e) R_i^3 R_e^3}{R_e^3 - R_i^3}$$

$$\varepsilon_{rr} = A - 2 B / r^3, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = A + B / r^3$$

$$\sigma_{rr} = \frac{p_i R_i^3 - p_e R_e^3}{R_e^3 - R_i^3} - \frac{(p_i - p_e) R_i^3 R_e^3}{(R_e^3 - R_i^3) r^3}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p_i R_i^3 - p_e R_e^3}{R_e^3 - R_i^3} + \frac{(p_i - p_e) R_i^3 R_e^3}{2 (R_e^3 - R_i^3) r^3}$$

Les mêmes conclusions que pour le cylindre s'appliquent à la sphère lorsqu'il s'agit de parois minces et l'on obtient :

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} \approx \frac{(p_i - p_e) R_i}{2 e} \quad \text{lorsque } e \ll R_i$$

1.3. Réservoir sous pression

Calculez l'état de contrainte dans la partie cylindrique dans la région centrale du réservoir de la figure précédente.

A.N. : $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$, $R_i = 30 \text{ cm}$, $p_i = 1 \text{ MPa}$, $p_e = 0 \text{ MPa}$, $\sigma_{vMmax} = 100 \text{ MPa}$. Calculez la valeur minimale de l'épaisseur e pour que la contrainte de von Mises ne dépasse pas σ_{vMmax} .

Solution

En utilisant l'approximation des parois minces, on peut considérer que la matière est en bition en superposant la traction liée à la calotte sphérique à celle d'un cylindre non bloqué en z.

Dans le repère cylindrique on a donc $\sigma_{\theta\theta} \approx \frac{p_i R_i}{e}$, $\sigma_{zz} \approx \frac{p_i R_i}{2 e}$ et σ_{rr} . Cette dernière contrainte varie de $-p_i$ à 0 et on l'a considérera négligeable en première approximation. On vérifiera que $\frac{R_i}{e} \gg 1$ et donc $\sigma_{rr} \ll \sigma_{\theta\theta}$, d'où :

$$\sigma_{vM} = \sqrt{[(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2]/2} \approx \frac{p_i R_i}{e} \sqrt{(1 + 1/4 + 1/4)/2}$$

$$= \frac{p_i R_i}{e} \sqrt{3/2} \Rightarrow e \geq \frac{p_i R_i}{\sigma_{vM}} \sqrt{3/2}$$

Il conviendra donc de prévoir au moins 2.6 mm d'épaisseur pour respecter ce critère. L'hypothèse de paroi mince est vérifiée. Une attention particulière sera apportée aux cordons de soudure...