

# Mécanique des structures et résistance des matériaux

Christophe Fond

*Université de Strasbourg, I.U.T. Robert Schuman*

*et Laboratoire ICube*

Préambule.....	3
1. Introduction .....	3
1.1. Nature de différents types de problème en mécanique des milieux continus.....	3
1.2. Quelques considérations pour le génie civil.....	4
1.3. A propos de la théorie des poutres.....	5
1.4. Principales notations .....	6
1.5. Déformations .....	6
1.5.1. Admissibilité de la cinématique .....	6
1.5.2. Allongement - raccourcissement.....	7
1.5.3. Distorsion.....	7
1.5.4. Tenseur des déformations .....	7
1.5.5. Equations de compatibilité.....	8
1.6. Contraintes.....	8
1.6.1. Vecteur contrainte .....	8
1.6.2. Tenseur des contraintes .....	8
1.6.3. Réciprocité des contraintes tangentielles.....	9
1.6.4. Admissibilité de la statique.....	9
1.6.5. Représentation de l'état de contrainte en un point par les cercles de Mohr.....	9
1.7. Principe fondamental en MMC.....	10
1.7.1. Equilibre .....	10
1.7.2. Puissances virtuelles et travaux virtuels .....	11
1.8. Solutions en MMC.....	12
2. Comportement des matériaux – résistance des matériaux .....	12
2.1. Classification du comportement mécanique des matériaux .....	12
2.1.1. Préambule .....	12
2.1.2. Définitions .....	13
2.1.3. Modèles rhéologiques.....	16
2.1.4. Plasticité dans les métaux : micromécanismes de base et "comportement émergent".....	16
2.2. Notion de thermomécanique.....	17
2.2.1. Coefficient de dilatation thermique.....	17
2.3. Elasticité linéaire – loi de Hooke.....	17
2.3.1. Elasticité isotrope .....	17
2.3.2. Thermo-élasticité isotrope .....	18
2.3.3. Elasticité anisotrope .....	18
2.3.4. Limite élastique et critères de plasticité .....	18
2.4. Rupture .....	19
2.4.1. Rupture sous chargement monotone .....	19
2.4.2. Rupture sous chargement cyclique, fatigue .....	19

3. Exemples de réalisations .....	21
4. Modélisation des conditions aux limites .....	25
4.1. Déplacements imposés .....	25
4.2. Pression, contraintes imposées, surface libre .....	25
4.3. Liaisons extérieures.....	26
4.4. Appuis élastiques .....	27
4.5. Liaisons intérieures .....	27
4.5.1. Cas de la construction métallique.....	27
4.5.2. Cas du béton armé et/ou précontraint.....	28
4.5.3. Cas de la construction en bois – lamellé collé .....	29
4.5.4. Cas de la construction mixte .....	30
4.6. Remarques .....	30
5. Spécificités de la théorie des poutres .....	30
5.1. Poutre – barre.....	30
5.1.1. Définition .....	30
5.1.2. Equilibre des poutres et barres .....	30
5.2. Hypothèse de Navier-Bernoulli .....	31
5.2.1. Cinématique .....	31
5.2.2. Déformation d'une section .....	31
5.2.3. Admissibilité .....	32
5.3. Principe de S <sup>t</sup> Venant, torseur généralisé .....	33
5.3.1. Equilibre d'une section .....	33
5.3.2. Relation entre l'effort tranchant et le moment fléchissant .....	34
5.3.3. Répartition des contraintes dans une section .....	34
5.3.3.1. Contraintes normales .....	34
5.3.3.2. Moment quadratique et théorème d'Huygens.....	35
5.3.3.3. Effort normal et Moment fléchissant.....	35
5.3.3.4. Contraintes tangentielles .....	36
5.3.3.5. Diagrammes de sollicitations .....	36
5.3.4. Déformation d'une poutre .....	36
5.3.5. Remarque.....	36
5.4. Energie de déformation .....	36
5.4.1. Energie et élasticité .....	36
5.4.2. Energie de déformation liée à l'effort normal.....	37
5.4.3. Energie de déformation liée à l'effort tranchant .....	38
5.4.4. Energie de déformation liée au moment fléchissant .....	38
5.4.5. Energie de déformation élastique dans une poutre.....	38
6. Résolution des problèmes de poutres droites -systèmes isostatiques plans .....	39
6.1. Equation de la déformée.....	39
6.2. Déplacement ou rotation en un point .....	40
6.3. Théorème de Verechaguine, intégrales de Mohr .....	41
7. Résolution des problèmes de poutres droites - systèmes hyperstatiques plans.....	41
7.1. Degré d'hyperstaticité.....	41
7.2. Résolution par la méthode des forces.....	42
7.3. Formule des trois moments, démonstration à partir de la méthode des forces.....	43
8. Méthode des déplacements.....	44
8.1. Introduction .....	44
8.2. Solution de base .....	45
8.2.1. Composante liée à l'effort normal .....	45
8.2.2. Exemple pour un système triangulé .....	47
8.2.3. Composantes liées à la flexion.....	48
8.2.4. Matrice de rigidité d'une poutre .....	50

8.2.5. Exemple pour un système fléchi .....	50
8.2.6. Formule des trois moments à partir de la méthode de déplacements.....	51
8.2.7. Exemple de mise en œuvre de la méthode dite des 3 moments.....	52
8.3. Formulaire .....	53
9. Flambement et instabilités de forme.....	54
9.1. Hypothèses de calcul.....	54
9.2. Cas de la compression simple – flambement d'Euler.....	54
10. Exemple de résolution d'un problème de portique.....	55
10.1. Résolution par la méthode des forces.....	55
10.2. Remarque concernant les déplacements des têtes de poteau dans des portiques....	57
Annexe 1 : Un peu de géométrie pour un tétraèdre.....	59
Annexe 2 : Section réduite liée au cisaillement .....	60
A3. Démonstration inverse du TFS à partir du PTV... ..	61
Annexe 4 : En quoi la théorie des poutres n'est pas une solution exacte ? .....	61
A4. 1 Gauchissement des sections.....	61
A4. 2 Flexion circulaire .....	62
A4. 3 Loin des points d'application des charges.....	62
Annexe 5 : Théorème des travaux virtuels, que serait la démonstration pour une poutre droite ?.....	63
A5. 1 Préambule .....	63
A5. 2 Champs cinématiquement admissible et statiquement admissible.....	63
A5. 3 Travail des efforts intérieurs .....	64
A5. 4 Termes liés à l'effort normal .....	64
A5. 5 Termes liés à l'effort tranchant.....	65
A5. 6 Termes liés au moment fléchissant .....	65
A5. 7 Total du travail des efforts intérieurs .....	66
Annexe 6 : Relation de conversion entre rayon de courbure et contraintes internes résiduelles .....	67
A6. 1 Introduction.....	67
A6. 2 Énoncé du problème .....	67
A6. 3 Equations d'équilibre de la poutre en absence de force extérieure .....	68
A6. 4 Cas "classique" du module d'Young uniforme .....	70
A6. 5 Moyenne du module d'Young mesuré par essai de flexion .....	71
A6. 6 Contrainte résiduelle éventuellement additionnelle liée à l'enlèvement de lamelle .....	71
A6. 7 Références bibliographiques de cette annexe .....	71

## Préambule

Ce cours résume certaines notions de mécanique des milieux (MMC) continus déjà abordées de sorte que la continuité apparaisse entre la MMC et la théorie des poutres. Les notions déjà vues seront revisitées très rapidement.

Il est plus commode en MMC d'utiliser des indices ( $x_1, x_2, x_3$ ) pour repérer les axes que des lettres différentes ( $x, y, z$ ). Toutefois, pour certaines parties de ce cours, les indices servent à repérer des objets et dans ce cas nous aurons recours à cette dernière notation.

## 1. Introduction

### *1.1. Nature de différents types de problème en mécanique des milieux continus*

Pour qu'une structure demeure pérenne, il faut éviter de l'endommager. On cherchera donc à rester dans le domaine d'utilisation des matériaux où les phénomènes sont totalement réversibles.

En pratique, il ne faudra pas dépasser la *limite élastique* des matériaux. On parlera de *comportement linéaire élastique*. Dans le cas contraire, on parlera de non-linéarité "matériau".

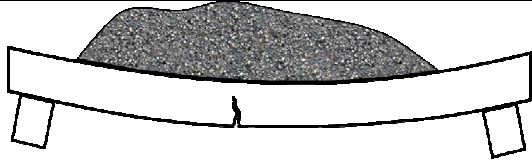
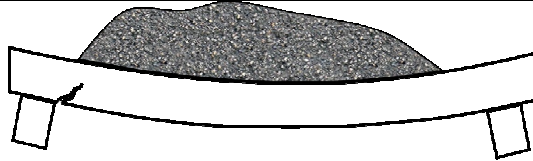
Pour qu'une structure soit peu déformable, il faut éviter les *grandes déformations* du matériau ainsi que les *grands déplacements* de la structure. On parlera alors des *hypothèses des petites perturbations (H. P. P.)*. Dans le cas contraire, on parlera de non-linéarité "matériau" en grandes déformations<sup>1</sup> et/ou de non-linéarité "géométrique" en grands déplacements.

Les variations de température induisent aussi des déformations et variations dimensionnelles des structures. Les *dilatations thermiques* différentielles peuvent générer des contraintes considérables dans des structures et des matériaux. Elles peuvent être causées par la non-uniformité du champ de température et/ou la non-uniformité des propriétés de dilatation thermiques des matériaux. On parle alors de *problème thermo-mécanique*. Dans certains cas, il faut de plus considérer les variations du comportement mécanique avec la température, ce qui conduit aussi à une forme de non-linéarité de comportement.

Pour la plupart des réalisations, la structure est réutilisée et les grandes déformations et grands déplacements sont indésirables. Le matériau est donc souvent sollicité dans le domaine d'élasticité linéaire. Par ailleurs, les effets de la température peuvent souvent être négligés. Dans les cas d'H. P. P. et d'élasticité linéaire, quelle que soit l'histoire de chargement de la structure pour passer d'un état de sollicitation à un autre, on aboutit toujours au même et unique état. Par ailleurs, il sera dans ces cas loisible de superposer les sollicitations mécaniques et leurs effets.

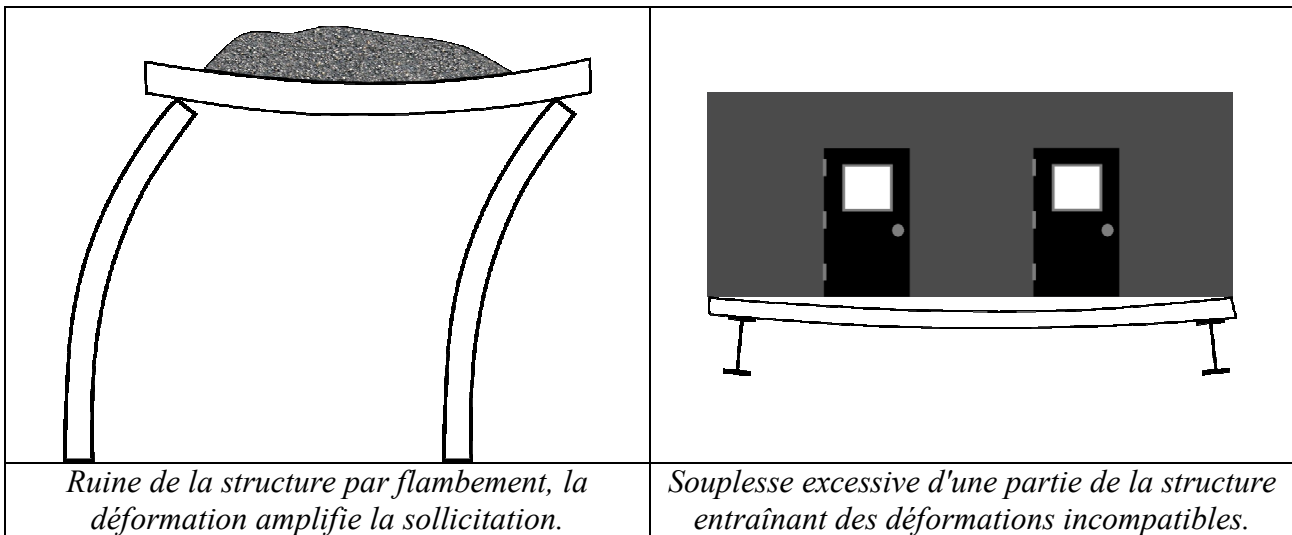
### 1.2. Quelques considérations pour le génie civil

Les constructions doivent assurer la sécurité des personnes et des biens. Les règlements de construction considèrent plusieurs situations dont les principales sont les états limites de service (ELS) et les états limites ultimes (ELU). Aux ELS il s'agit de ne jamais générer de déformation permanente ce qui conduit à rester dans le domaine élastique des matériaux. Aux ELU on admet que la structure peut avoir subi des dommages causés par des événements rares mais elle doit avoir assuré la sécurité. Dans ce dernier cas, la sortie du matériau du domaine d'élasticité permet d'atteindre les limites du matériau et de changer la distribution des efforts dans la structure.

	
<p><i>Ruine de la structure par rupture du matériau en traction sous l'effet de la flexion.</i></p>	<p><i>Ruine de la structure par rupture du matériau en traction sous l'effet du cisaillement.</i></p>

La ruine d'une structure peut-être liée aux limites de résistance des matériaux de construction. Elle peut aussi être liée à des instabilités de forme telles que flambement, voilement, déversement... Enfin, un manque de rigidité d'un ou plusieurs éléments de la structure peut conduire à des nuisances ou des dégâts.

<sup>1</sup> Sauf cas très particulier, un matériau subissant une grande déformation présente une réponse mécanique non linéaire.



### 1.3. A propos de la théorie des poutres

#### Quels ingrédients faut-il pour construire la théorie des poutres classique ?

- définition d'une poutre,
  - entre autres une dimension "grande" devant les deux autres,*
- hypothèse de Navier : les sections droites restent droites, les fibres parallèle à la fibre moyenne demeurent parallèles à la fibre moyenne,
  - excellente approximation de la réalité, valable même en grands déplacements et au-delà de l'élasticité linéaire,*
- hypothèse de Saint Venant : on est "loin" d'une charge ponctuelle,
  - au voisinage des charges ponctuelles les sections se gauchissent donc la théorie donne de moins bonne prédictions,*
- les fibres sont en situation de traction ou compression uniaxiale, on se donne donc comme loi de comportement contrainte = module d'Young \* déformation,
  - le coefficient de Poisson n'intervient donc pas dans cette théorie,*
- on doit assurer l'équilibre,
  - pour simplifier les calculs, on l'écrira généralement au niveau de la fibre moyenne afin d'éviter un couplage entre effort normal et moment fléchissant,*

Il suffit ensuite de faire « un peu » de géométrie, postuler l'équilibre et exprimer la loi de comportement pour tout reconstruire. La lecture de ce cours – et bien d'autres ([http://espace2christophe.chez.com/cours\\_ms\\_rdm.pdf](http://espace2christophe.chez.com/cours_ms_rdm.pdf), etc) - montre comment s'y prendre.



*Les sections droites restent droites.*



Point d'application d'une charge ponctuelle, les sections droites se gauchissent.

Au-delà de l'étude de la flexion, il conviendrait d'étudier la torsion. En général on évite ce genre de sollicitation sur les éléments de structure de génie civil. En génie mécanique, les efforts et puissances sont souvent transmis par des arbres soumis à de la torsion. C'est donc dans ce domaine de formation qu'on trouvera naturellement le plus de cours sur la torsion. Nonobstant, il faudra aux futurs ingénieurs du génie civil découvrir, au-delà de ce cours, les notions de base concernant la torsion. En effet, il est indispensable de poursuivre l'apprentissage par l'étude de la théorie des plaques. Celle-ci fait intervenir les notions de flexion et de torsion...

### 1.4. Principales notations

Les vecteurs et tenseurs sont en gras, les tenseurs d'ordre deux sont soulignés deux fois. Les opérateurs *grad*, *div*, etc, sont en italique.  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  représentent les trois directions de l'espace dans un repère orthonormé direct. **Id** représente le tenseur identité tel que  $Id_{ij} = 1$  et  $Id_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ .

<u>notation</u>	<u>unité</u>	<u>désignation</u>	<u>notation</u>	<u>unité</u>	<u>désignation</u>
$\Omega$	$m^3$	domaine spatial	$\partial\Omega$	$m^2$	surface de $\Omega$
$\gamma_{ij}$	$m/s^2$	accélération = $\partial^2 u / \partial t^2$	$\rho$	$Kg/m^3$	densité
$f_i$	$N/m^3$	force volumique	$\epsilon_{ij}$	- ou $m/m$	déformation (petite) de Green
$\sigma_{ij}$	$N/m^2$ ou Pa	contrainte (vraie) de Cauchy	<b>F</b>	N	force
<b>T</b>	$N/m^2$	vecteur contrainte	<b>q</b>	$N/m$	charge répartie selon $x_2$
<b>P</b>	$N/m$	charge répartie selon $x_1$	<b>A</b>	$m^2$	aire d'une section
$N, N_{ij}$	N	effort normal	$S_r$	$m^2$	section réduite
$V, V_{ij}$	N	effort tranchant	$I_{GZ}$	$m^4$	Moment quadratique d'une section (ou inertie)
$M, M_{ij}$	Nm	moment fléchissant	$y(x_1)$	m	flèche en $x_1$
<b>T</b>	$^\circ K$	température	<b>dans la notation (x, y, z)</b>		
<b>W</b>	J	énergie ou travail	$u_i$	m	déplacement de i selon x
<b>dans la notation (<math>x_1, x_2, x_3</math>)</b>			$v_i$	m	déplacement de i selon y
$u_i$	m	déplacement d'axe i			
$v_i$	m/s	vitesse d'axe i = $\partial u_i / \partial t$			

Un fond de page grisé indique qu'il s'agit de notions déjà vues, en général en cours de mécanique des milieux continus et/ou non spécifiques au génie civil. Ces notions ne sont généralement pas détaillées en cours.

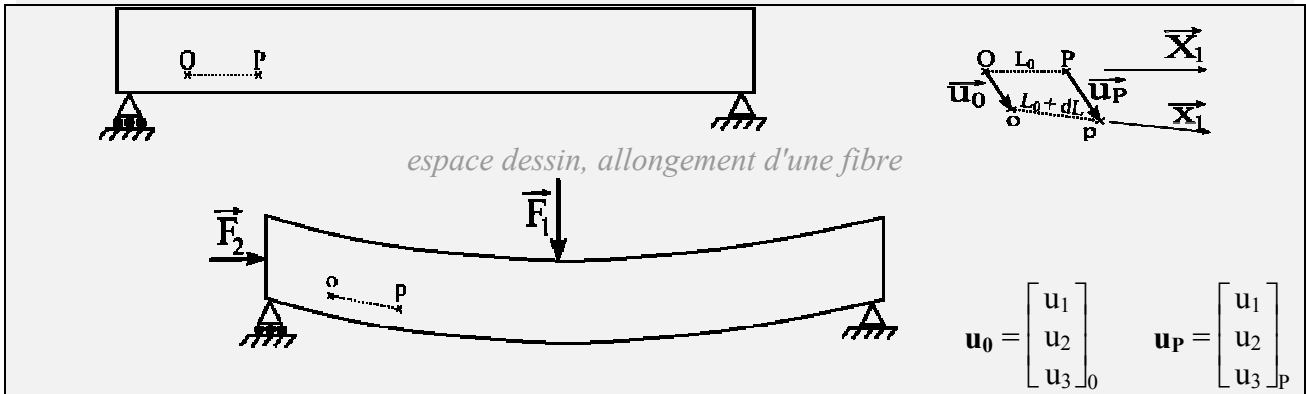
### 1.5. Déformations

#### 1.5.1. Admissibilité de la cinématique

Un champ de déplacements est dit *cinématiquement admissible* s'il respecte les conditions aux limites, est dérivable et ne génère pas d'interpénétration de matière ni de vide.

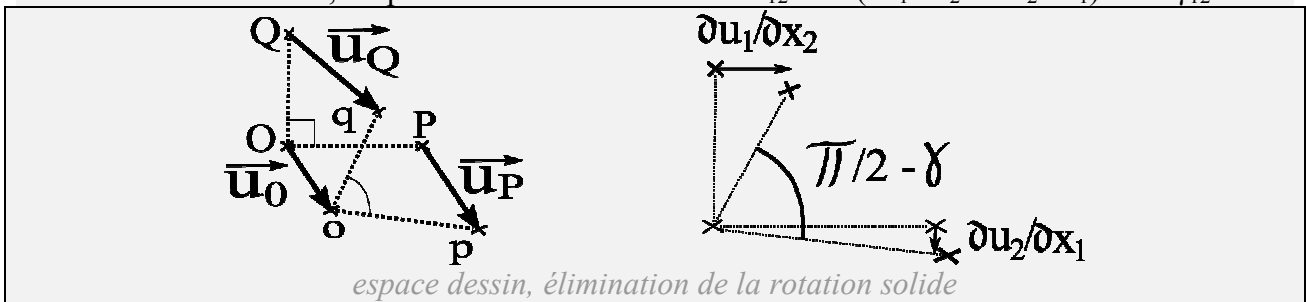
### 1.5.2. Allongement - raccourcissement

Il existe deux façons de considérer les mouvements de matière. La description eulérienne, principalement utilisée en mécanique des fluides, considère les points de l'espace et la vitesse matérielle en ces points. La description lagrangienne, principalement utilisée en mécanique des solides, considère la vitesse ou le déplacement des points matériels dans l'espace. Sous les H. P. P., on assimile la position actuelle dans l'espace des points matériels à leur position initiale et les descriptions se rejoignent. En conséquence les rotations d'axes  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  attachés à la matière sont considérées comme négligeables. L'expression d'une déformation longitudinale est donc  $\varepsilon_{11} = \partial u_1 / \partial x_1$ . Les translations et rotations solides n'induisent pas de déformation. Il existe différentes façons de représenter les déformations ( $\Delta L/L_0$ ,  $\Delta L/L_0 + \frac{1}{2} (\Delta L/L_0)^2$ ,  $\ln(\Delta L/L_0)$ , ...) mais sous les H. P. P. toutes se rejoignent.



### 1.5.3. Distorsion

Sous les H. P. P., l'expression d'une distorsion est  $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} (\partial u_1 / \partial x_2 + \partial u_2 / \partial x_1) = \frac{1}{2} \gamma_{12}$ .



### 1.5.4. Tenseur des déformations

Sous les H. P. P., l'expression du tenseur des déformations est :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{grad}}} \mathbf{u} + \underline{\underline{\text{grad}}}^T \mathbf{u})$$

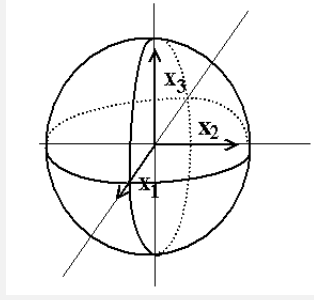
Le tenseur des déformations est symétrique, i. e.  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ . Il existe un repère principal dans lequel les termes non diagonaux s'annulent. Dans ce repère, on note conventionnellement les déformations principales  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ . Pour trouver le repère principal il faut résoudre l'équation :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n} \quad \Leftrightarrow \quad (\underline{\underline{\varepsilon}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{Id}}}) \cdot \mathbf{n} = 0$$

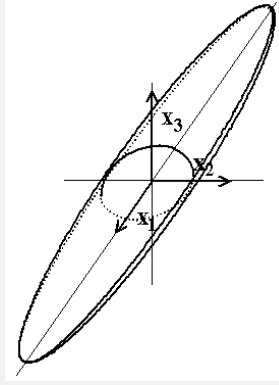
Pour un tenseur symétrique,  $\det(\underline{\underline{\varepsilon}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{Id}}}) = 0$  admet 3 valeurs propres réelles qui sont les déformations principales  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$ . En effet :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \lambda & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} - \lambda & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pour que ce système admettent une autre solution que (0, 0, 0) il faut que son déterminant soit nul. Dans le repère principal, on peut visualiser l'ellipsoïde des dilatations :



$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$$



$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \varepsilon_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dans la direction principale 1,  $L / L_0 = (L_0 + \Delta L) / L_0 = 1 + \varepsilon_1$

Dans la direction principale 2,  $e / e_0 = (e_0 + \Delta e) / e_0 = 1 + \varepsilon_2$

Dans la direction principale 3,  $h / h_0 = (h_0 + \Delta h) / h_0 = 1 + \varepsilon_3$

### 1.5.5. Equations de compatibilité

Les déformations étant liées par dérivations aux déplacements, elles ne peuvent pas évoluer indépendamment. Les déformations doivent donc respecter 6 équations, obtenues par permutation circulaire à partir de :

$$\partial^2 \varepsilon_{ij} / \partial x_k \partial x_l - \partial^2 \varepsilon_{ik} / \partial x_j \partial x_l = \partial^2 \varepsilon_{jl} / \partial x_i \partial x_k - \partial^2 \varepsilon_{lk} / \partial x_i \partial x_j$$

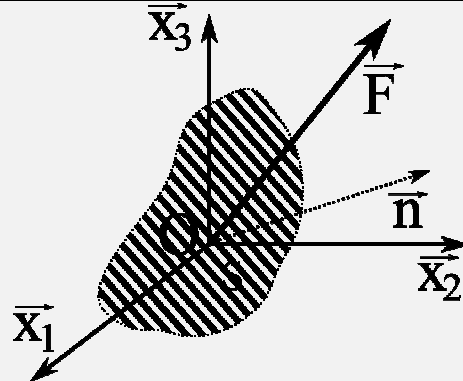
## 1.6. Contraintes

### 1.6.1. Vecteur contrainte

Sous les H. P. P., on n'actualise pas les surfaces sur lesquelles s'exercent les forces car leurs variations sont considérées négligeables. Si une force  $d\mathbf{F}$  est appliquée sur un élément de surface  $ds$ , le vecteur contrainte au point M est défini par :

$$\mathbf{V} = \lim_{ds \rightarrow 0} \mathbf{F} / ds = \lim_{ds_0 \rightarrow 0} \mathbf{F} / ds_0$$

où  $ds_0$  désigne l'élément de surface dans l'état initial et  $ds$  dans l'état actuel



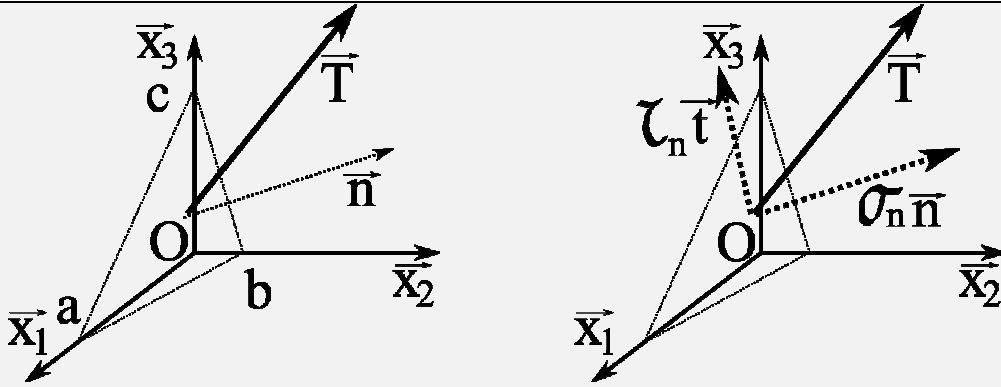
espace dessin, vecteur contrainte en O

### 1.6.2. Tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes permet de connaître le vecteur contrainte sur une facette orientée par  $\mathbf{n}$ . Il est défini par :



$$\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}$$



espace dessin, équilibre du tétraèdre, tenseur des contraintes

Bilan des forces selon  $\mathbf{x}_1$  :

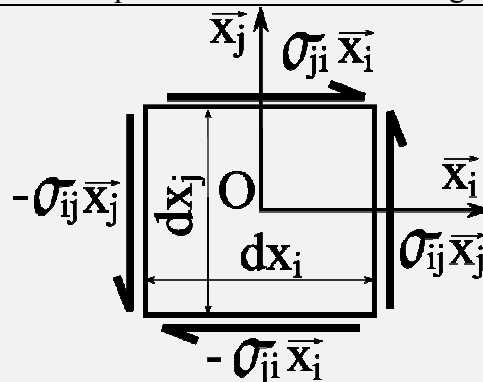
$$-\sigma_{11} \frac{1}{2}bc - \sigma_{21} \frac{1}{2}ab - \sigma_{31} \frac{1}{2}ac + T_1 \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 b_2^2 + a_1^2 c_3^2 + c_3^2 b_2^2} = 0 \text{ d'où}$$

$$T_1 = (\sigma_{11} bc + \sigma_{21} ab + \sigma_{31} ac) / \sqrt{a_1^2 b_2^2 + a_1^2 c_3^2 + c_3^2 b_2^2} = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3$$

A l'instar des déformations, il existe un repère principal dans lequel les contraintes de cisaillement s'annulent. Le repère principal est le même pour les contraintes que pour les déformations. Par convention  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . La contrainte normale vaut  $\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ . La contrainte tangentielle est la complémentaire à  $\mathbf{T}$  dans le plan de la facette considérée, i. e.  $\tau_n \mathbf{t} = \mathbf{T} - (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$ .

### 1.6.3. Réciprocité des contraintes tangentielles

Sauf cas très particulier de couple magnétique, l'équilibre des moments pour élément de volume impose que  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  d'où la réciprocité des contraintes tangentielles.



espace calcul, pas de couple à l'échelle microscopique

### 1.6.4. Admissibilité de la statique

Un champ de contraintes est dit *statiquement admissible* s'il respecte les conditions aux limites en effort et l'équilibre en tout point.

### 1.6.5. Représentation de l'état de contrainte en un point par les cercles de Mohr

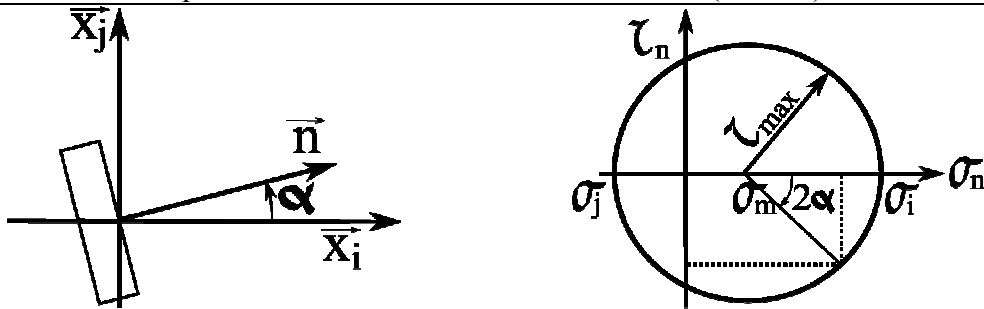
Dans un plan  $(x_i, x_j)$ , la normale est définie par  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ . Dans ce plan, il peut être commode d'exprimer le vecteur contrainte dans le repère principal à partir de la contrainte

moyenne  $\sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_i + \sigma_j)$  et  $\tau = \frac{1}{2} (\sigma_i - \sigma_j)$ . La composante du vecteur contrainte dans ce plan vaut  $(\cos \alpha \sigma_i, \sin \alpha \sigma_j)$ . La composante normale  $\sigma_n$  vaut  $(\cos^2 \alpha \sigma_i + \sin^2 \alpha \sigma_j)$  et la composante tangentielle  $\tau_n$  vaut  $(-\sin \alpha \cos \alpha \sigma_i + \cos \alpha \sin \alpha \sigma_j)$ .

$$\sigma_n = \cos^2 \alpha (\sigma_m + \tau) + \sin^2 \alpha (\sigma_m - \tau) = \sigma_m + \tau (\cos 2\alpha)$$

$$\tau_n = \sigma_m (-\cos \alpha \sin \alpha + \cos \alpha \sin \alpha) + \tau (-\cos \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \sin \alpha) = -\tau (\sin 2\alpha)$$

Il apparaît l'équation d'un cercle de centre  $(\sigma_m, 0)$  et de rayon  $\tau$  dans le plan  $(\sigma_n, \tau_n)$ . La contrainte tangentielle maximale correspond donc à  $\alpha = 45^\circ$  et vaut  $\frac{1}{2} (\sigma_i - \sigma_j)$ . On peut procéder à des permutations circulaires entre  $\sigma_i, \sigma_j$  et  $\sigma_k$  pour couvrir les 3 plan définis par les trois directions principales. On constate que le cisaillement maximal vaut  $\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$ .



*espace dessin, facettes perpendiculaires diamétralement opposées*

## 1.7. Principe fondamental en MMC

### 1.7.1. Equilibre

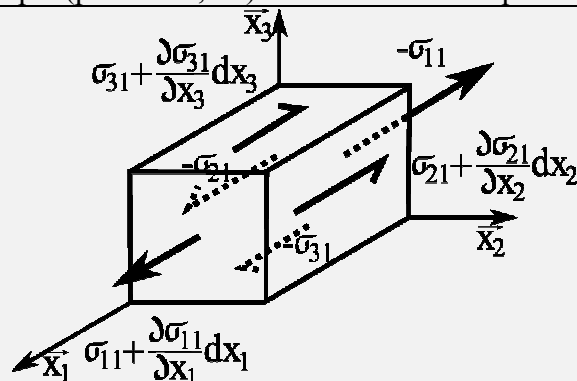
L'équilibre peut être dit "dynamique" ou "statique" selon que, respectivement, l'on considère les effets inertiels ou non. Les équations écrites en "dynamique" sont toujours valables. On en tire celles de la "statique" en négligeant les termes inertiels.

#### Principe fondamental de l'équilibre

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{f} - \rho \gamma = \mathbf{0}$$

Cette équation traduit l'équilibre des forces. L'équilibre des moments est lié à la symétrie du tenseur des contraintes (voir la section *réciprocité des contraintes tangentielles*). En statique on néglige le terme d'accélération pour obtenir :  $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$

En absence de force volumique (pesanteur, ...) on obtient en statique :  $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{0}$



*espace dessin, id. avec les forces de volume*

On parlera de puissances en dynamique et de travaux en statique.

### 1.7.2. Puissances virtuelles et travaux virtuels

Postulant le principe l'équilibre en tout point matériel qui est exprimé par :

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{f} - \rho \gamma = \mathbf{0}$$

On peut multiplier  $\mathbf{0}$  par un vecteur vitesse quelconque  $\mathbf{v}^*$  et intégrer sur un volume, on obtient toujours  $\mathbf{0}$  :

$$\iiint_{\Omega} \{(\text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{f} - \rho \gamma) \cdot \mathbf{v}^*\} d\Omega = \mathbf{0}$$

En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \{(\partial\sigma_{11}/\partial x_1 + \partial\sigma_{12}/\partial x_2 + \partial\sigma_{13}/\partial x_3 + f_1 - \rho \partial^2 u_1/\partial t^2) v_1^* \\ & + (\partial\sigma_{21}/\partial x_1 + \partial\sigma_{22}/\partial x_2 + \partial\sigma_{23}/\partial x_3 + f_2 - \rho \partial^2 u_2/\partial t^2) v_2^* \\ & + (\partial\sigma_{31}/\partial x_1 + \partial\sigma_{32}/\partial x_2 + \partial\sigma_{33}/\partial x_3 + f_3 - \rho \partial^2 u_3/\partial t^2) v_3^*\} dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \end{aligned}$$

On peut réécrire :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \{\partial\sigma_{11}/\partial x_1 v_1^* + \partial\sigma_{21}/\partial x_1 v_2^* + \partial\sigma_{31}/\partial x_1 v_3^* + (f_1 - \rho \partial^2 u_1/\partial t^2) v_1^* \\ & + (\partial\sigma_{12}/\partial x_2 v_1^* + \partial\sigma_{22}/\partial x_2 v_2^* + \partial\sigma_{32}/\partial x_2 v_3^* + (f_2 - \rho \partial^2 u_2/\partial t^2) v_2^* \\ & + (\partial\sigma_{13}/\partial x_3 v_1^* + \partial\sigma_{23}/\partial x_3 v_2^* + \partial\sigma_{33}/\partial x_3 v_3^* + (f_3 - \rho \partial^2 u_3/\partial t^2) v_3^*\} dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \end{aligned}$$

Si  $\mathbf{v}^*$  est dérivable, en intégrant par partie on obtient :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \{(f_1 - \rho \partial^2 u_1/\partial t^2) v_1^* + (f_2 - \rho \partial^2 u_2/\partial t^2) v_2^* + (f_3 - \rho \partial^2 u_3/\partial t^2) v_3^* + \\ & \partial[\sigma_{11} v_1^*]/\partial x_1 - \sigma_{11} \partial v_1^*/\partial x_1 + \partial[\sigma_{21} v_2^*]/\partial x_1 - \sigma_{21} \partial v_2^*/\partial x_1 + \partial[\sigma_{31} v_3^*]/\partial x_1 - \sigma_{31} \partial v_3^*/\partial x_1 + \\ & \partial[\sigma_{12} v_1^*]/\partial x_2 - \sigma_{12} \partial v_1^*/\partial x_2 + \partial[\sigma_{22} v_2^*]/\partial x_2 - \sigma_{22} \partial v_2^*/\partial x_2 + \partial[\sigma_{32} v_3^*]/\partial x_2 - \sigma_{32} \partial v_3^*/\partial x_2 + \\ & \partial[\sigma_{13} v_1^*]/\partial x_3 - \sigma_{13} \partial v_1^*/\partial x_3 + \partial[\sigma_{23} v_2^*]/\partial x_3 - \sigma_{23} \partial v_2^*/\partial x_3 + \partial[\sigma_{33} v_3^*]/\partial x_3 - \sigma_{33} \partial v_3^*/\partial x_3\} \\ & dx_1 dx_2 dx_3 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \{(\mathbf{f} - \rho \gamma) \cdot \mathbf{v}^*\} - \{\sigma_{11} \partial v_1^*/\partial x_1 + \sigma_{21} \partial v_2^*/\partial x_1 + \sigma_{31} \partial v_3^*/\partial x_1 + \sigma_{12} \partial v_1^*/\partial x_2 + \\ & \sigma_{22} \partial v_2^*/\partial x_2 + \sigma_{32} \partial v_3^*/\partial x_2 + \sigma_{13} \partial v_1^*/\partial x_3 + \sigma_{23} \partial v_2^*/\partial x_3 + \sigma_{33} \partial v_3^*/\partial x_3\} dx_1 dx_2 dx_3 \\ & + \iint_{\partial\Omega} |(\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13}) v_1^*|_{x_1} dx_2 dx_3 + \\ & \iint_{\partial\Omega} |(\sigma_{21} + \sigma_{22} + \sigma_{23}) v_2^*|_{x_2} dx_1 dx_3 + \iint_{\partial\Omega} |(\sigma_{31} + \sigma_{32} + \sigma_{33}) v_3^*|_{x_3} dx_1 dx_2 = 0 \end{aligned}$$

Si  $\sigma$  est symétrique (toujours sauf cas très particulier de couplage mécano-magnétique) :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \{(\mathbf{f} - \rho \gamma) \cdot \mathbf{v}^*\} dx_1 dx_2 dx_3 - \iiint_{\Omega} \{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{grad}} \mathbf{v}^*\} dx_1 dx_2 dx_3 \\ & + \iint_{\partial\Omega} |(\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13}) v_1^*|_{x_1} dx_2 dx_3 + \\ & \iint_{\partial\Omega} |(\sigma_{21} + \sigma_{22} + \sigma_{23}) v_2^*|_{x_2} dx_1 dx_3 + \iint_{\partial\Omega} |(\sigma_{31} + \sigma_{32} + \sigma_{33}) v_3^*|_{x_3} dx_1 dx_2 = 0 \end{aligned}$$

En remarquant que,  $\mathbf{n}$ , la normale sortante du milieu, est telle que  $n_i = dx_j dx_k / d\partial\Omega$  (i, j et k tous différents, voir l'annexe 1) :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \{(\mathbf{f} - \rho \gamma) \cdot \mathbf{v}^*\} dx_1 dx_2 dx_3 - \iiint_{\Omega} \{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{grad}} \mathbf{v}^*\} dx_1 dx_2 dx_3 \\ & + \iint_{\partial\Omega} |(\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13}) v_1^*|_{x_1} n_1 d\partial\Omega + \\ & \iint_{\partial\Omega} |(\sigma_{21} + \sigma_{22} + \sigma_{23}) v_2^*|_{x_2} n_2 d\partial\Omega + \iint_{\partial\Omega} |(\sigma_{31} + \sigma_{32} + \sigma_{33}) v_3^*|_{x_3} n_3 d\partial\Omega = \end{aligned}$$

$$\iiint_{\Omega} \{(\mathbf{f} - \rho \gamma) \cdot \mathbf{v}^*\} d\Omega - \iiint_{\Omega} \{\underline{\underline{\sigma}} : \mathbf{grad} \mathbf{v}^*\} d\Omega + \iint_{\partial\Omega} V_1 v_1^* ds + \iint_{\partial\Omega} V_2 v_2^* ds + \iint_{\partial\Omega} V_3 v_3^* d\partial\Omega =$$

### **Théorème des puissances virtuelles :**

$$\iiint_{\Omega} \{(\mathbf{f} - \rho \gamma) \cdot \mathbf{v}^*\} d\Omega - \iiint_{\Omega} \{\underline{\underline{\sigma}} : \mathbf{grad} \mathbf{v}^*\} d\Omega + \iint_{\partial\Omega} \{\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}^*\} d\partial\Omega = 0$$

En d'autres termes, la puissance des efforts intérieurs est égale à la puissance des efforts extérieurs.

Dans le cas statique, on remplace le vecteur  $\mathbf{v}^*$  vitesse par le vecteur déplacement  $\mathbf{u}^*$  et le terme  $\rho \gamma$  est donc considéré comme négligeable. On aboutit alors au

### **Théorème des travaux virtuels :**

$$\iiint_{\Omega} \{\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^*\} d\Omega - \iiint_{\Omega} \{\underline{\underline{\sigma}} : \mathbf{grad} \mathbf{u}^*\} d\Omega + \iint_{\partial\Omega} \{\mathbf{V} \cdot \mathbf{u}^*\} ds = 0$$

En d'autres termes, le travail des efforts intérieurs est égal au travail des efforts extérieurs.

NB. On a postulé ici le principe de l'équilibre et démontré le théorème des **puissances virtuelles**. Si l'on postule le principe des puissances virtuelles, on démontre alors le théorème de l'**équilibre**. Ces deux **notions** sont **duales**.

## **1.8. Solutions en MMC**

Un champ partout statiquement et cinématiquement admissible qui respecte partout la loi de comportement est solution exacte d'un problème de M. M. C. . Dans le cadre des h. p. p. – pas de non-linéarité matériau ni géométrique -, il solution unique et exacte du problème.

## **2. Comportement des matériaux – résistance des matériaux**

### **2.1. Classification du comportement mécanique des matériaux**

#### **2.1.1. Préambule**

Le comportement mécanique d'un matériau à l'état solide peut présenter différents types de composantes. La plus connue est l'*élasticité*. Elle se manifeste pour la plupart des matériaux en petites déformations – typiquement moins de 1 ‰ pour les matériaux raides tels que les aciers, céramiques et moins de 1 % pour les matériaux plus souples tels que le bois et les matières plastiques<sup>2</sup>. Dès que l'on soumet un matériau à de plus grandes déformations, son comportement mécanique peut présenter de la *plasticité* et/ou de l'*endommagement* (inélasticité). L'éventuelle *viscosité* du matériau peut en revanche se manifester dès les petites déformations. Cette composante du comportement est responsable du fluage, de la relaxation et de l'élasticité recouvrée (anélasticité). Dès que l'on sort du cadre de l'élasticité linéaire on parle de "non-linéarité du comportement mécanique". On peut ainsi traiter de viscoélasticité, viscoplasticité, viscoélastoplasticité, plasticité avec endommagement, élasticité non linéaire, etc.

La composante visqueuse du comportement est responsable de la sensibilité de la réponse mécanique à la vitesse de la sollicitation<sup>3</sup> ou au temps d'application de la sollicitation mécanique.

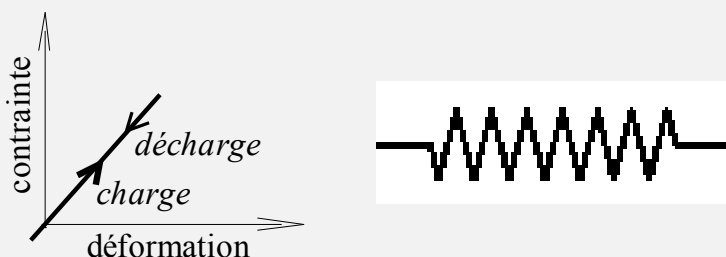
<sup>2</sup> dans le langage usuel matières plastiques désigne les hauts polymères. En toute rigueur il conviendrait de considérer que "matières plastiques" désignent les matériaux déformables présentant un comportement plastique et les métaux entreraient dans cette appellation.

<sup>3</sup> La sollicitation mécanique peut être une déformation imposée ou une contrainte imposée, voire une combinaison des deux.

Le temps et la température sont liés, souvent de façon complexe. D'une façon générale, on constate expérimentalement que plus le matériau solide est proche de sa température de ramollissement ou fusion, plus les effets de sa viscosité sont importants. Ainsi, à température ambiante un bitume ou un haut polymère seront bien plus sensibles à la vitesse de sollicitation qu'un acier ou une céramique. Pour les aciers, on admet en général que les effets de la viscosité à température ambiante sont du second ordre. L'eau liée dans les bétons et le bois est aussi responsable d'une relativement faible viscosité.

### 2.1.2. Définitions

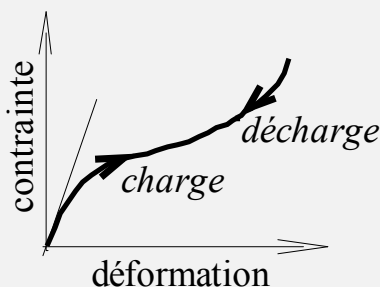
Elasticité : comportement réversible sans dissipation d'énergie, i.e. l'énergie fournie pour déformer le matériau est totalement restituée au déchargement. On peut considérer une relation contrainte-déformation linéaire aux petites déformations.



*Comportement élastique linéaire – représenté schématiquement par un ressort.*

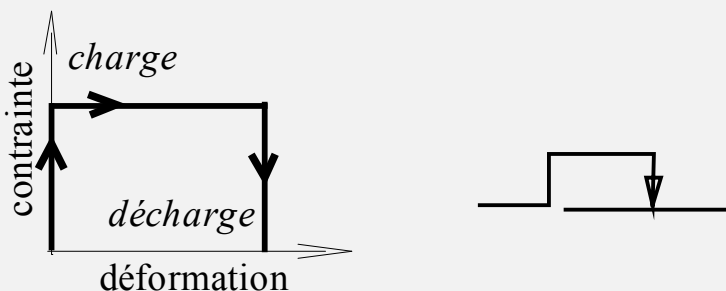
Une conséquence importante d'un tel comportement mécanique est le principe de superposition valide sous les H. P. P. en élasticité linéaire. En effet, les contraintes étant proportionnelles aux déformations, la superposition de sollicitations conduit à la superposition de leurs effets.

Pour les caoutchoucs et élastomères le comportement élastique peut être non linéaire aux grandes déformations – typiquement au-delà de 20 % de déformation.

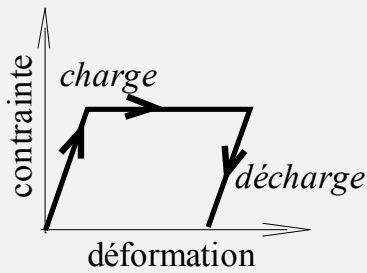


*Comportement élastique non linéaire.*

Plasticité : comportement irréversible avec dissipation d'énergie mécanique ne dépendant pas de la vitesse de sollicitation ou de sa durée d'application. Il y a une déformation résiduelle lorsque la sollicitation mécanique est supprimée.

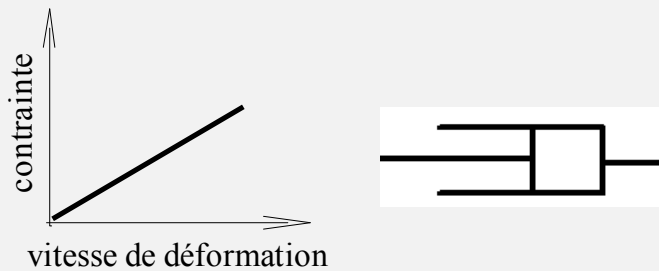


*Comportement plastique parfait – représenté schématiquement par un patin (avec frottement).*



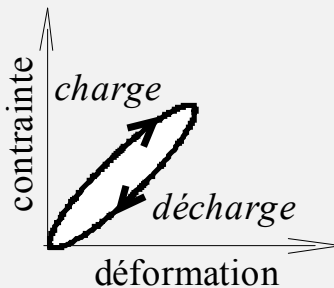
*Comportement élastique plastique parfait.*

Viscosité : comportement de type fluide avec dissipation d'énergie mécanique. L'application d'une contrainte induit une vitesse de déformation et réciproquement. En d'autres termes, si la déformation imposée ne varie plus au cours du temps, toute contrainte tend à disparaître, avec déformation irréversible.



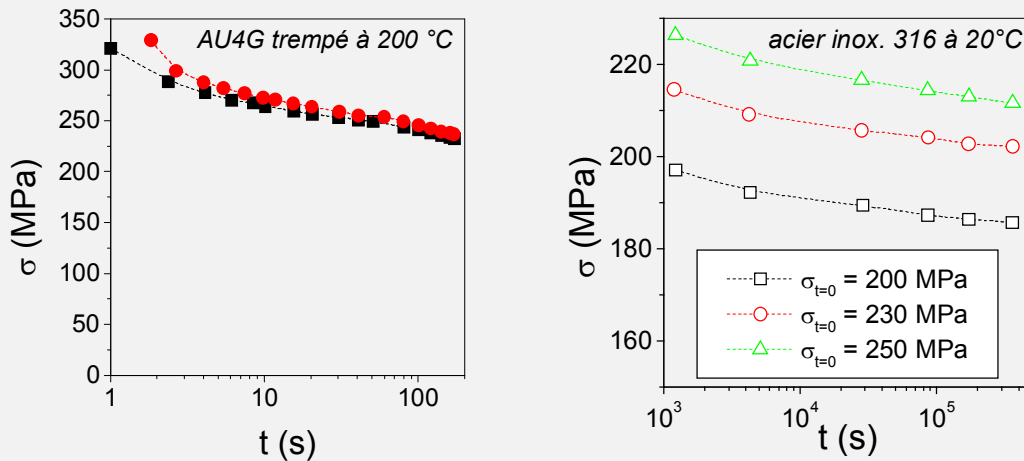
*Comportement visqueux linéaire représenté schématiquement par un amortisseur.*

Viscoélasticité : comportement réversible avec dissipation d'énergie mécanique dépendant de la vitesse de sollicitation ou de sa durée d'application. Il n'y a pas de déformation résiduelle lorsque la sollicitation mécanique est supprimée.



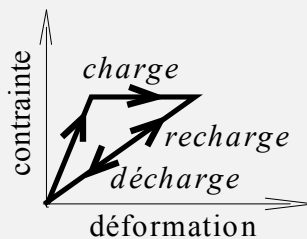
*Comportement viscoélastique.*

Viscoplasticité : comportement partiellement irréversible avec dissipation d'énergie mécanique dépendant de la vitesse de sollicitation ou de sa durée d'application. Il y a une déformation résiduelle lorsque la sollicitation mécanique est supprimée. Cette déformation résiduelle dépend de l'histoire du chargement.



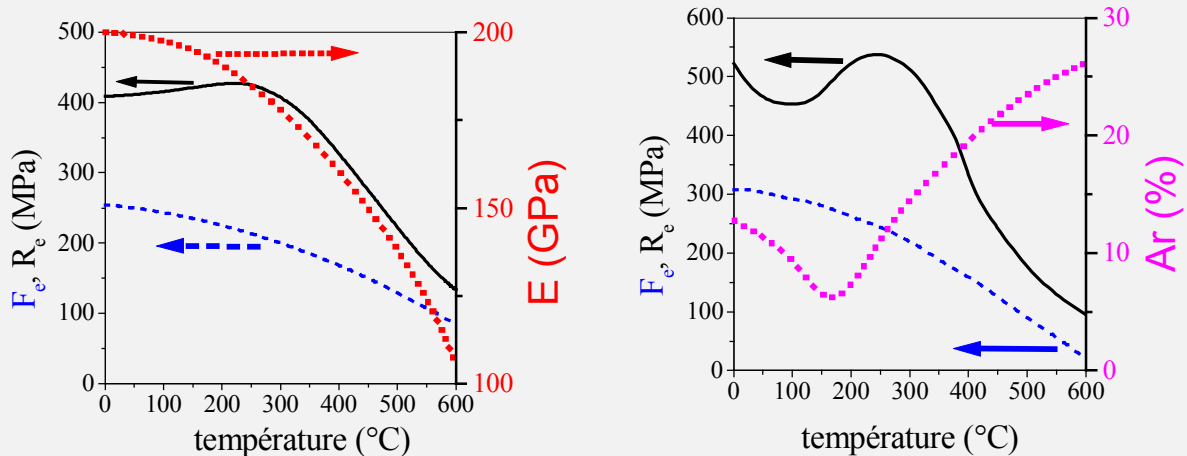
Exemples de résultats d'essais de relaxation sur métaux.

Endommagement: la sollicitation mécanique engendre une variation des modules d'élasticité, voire de l'anisotropie<sup>4</sup>. C'est typiquement une des composantes du comportement mécanique du béton hydraulique en compression lorsqu'on dépasse la contrainte réglementaire.



Comportement endommageable.

Effets de la température: Les propriétés mécaniques évoluent avec la température. Selon les mécanismes sous jacents impliqués et interagissant, les corrélations entre les évolutions peuvent être plus ou moins complexes.


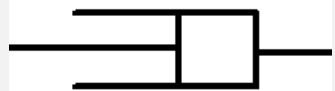


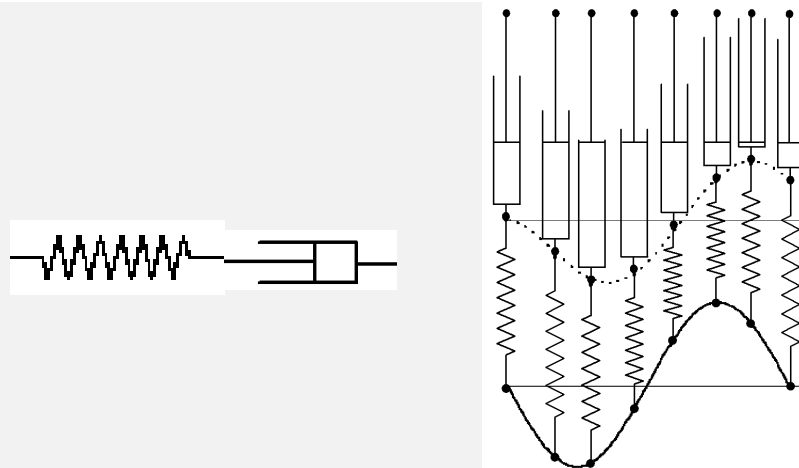
Variations des caractéristiques de deux aciers de type acier doux avec la température.

<sup>4</sup> Anisotropie : opposé à l'isotropie, l'anisotropie se manifeste par une réponse mécanique du matériau qui dépend de la direction de sollicitation.

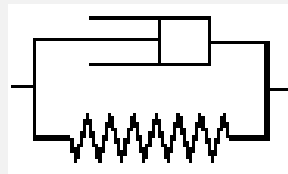
### 2.1.3. Modèles rhéologiques

Ce sont des modèles schématiques simples pour la compréhension et l'analyse pédagogique du comportement viscoélastique.

	$F = k x \Leftrightarrow F / S = E (\Delta L / L)$
	$F = k v \Leftrightarrow F / S = \eta \frac{\partial}{\partial t} (\Delta L / L)$



*Modèle rhéologique : élément de Maxwell pour le comportement viscoplastique.*



*Modèle rhéologique : élément de Kelvin-Voigt pour le comportement viscoélastique.*

### 2.1.4. Plasticité dans les métaux : micromécanismes de base et "comportement émergent"

Nombreux sont les phénomènes physiques qui nécessitent d'imbriquer les lois et mécanismes à plusieurs échelles pour comprendre le comportement macroscopique. On parle de *comportement émergent*. En effet, par exemple, la connaissance précise des interactions force-distance entre les atomes à l'échelle nanométrique ne permet pas de prédire le comportement plastique ni la rupture des métaux. En effet, des mouvements coopératifs à une échelle supérieure rendent possible l'accommodation de la déformation imposée à bien moindre énergie potentielle que des mouvements de blocs ou l'éloignement des atomes. Il s'agit en l'occurrence des mouvements de défauts appelés dislocations.



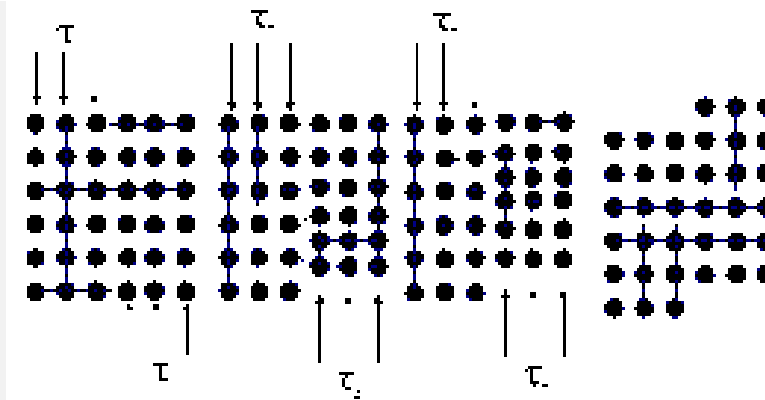


Schéma de principe montrant le déplacement d'une dislocation coin dans un cristal. Une dislocation préexistante traverse une région du cristal pour laisser une déformation plastique résiduelle (déformation permanente).

## 2.2. Notion de thermomécanique

### 2.2.1. Coefficient de dilatation thermique

Le coefficient de dilatation thermique pour les solides est aussi appelé coefficient de dilatation linéique. Il relie les variations dimensionnelles aux variations de température. Supposons un matériau dont les propriétés sont isotropes et un écart de température  $\Delta V$  suffisamment faible, on peut alors écrire :

$$\Delta L = \alpha_V L \Delta V = \alpha_V L (V_a - V_0)$$

où  $\Delta L$  est la variation de longueur,  $\alpha_V$  le coefficient de dilatation linéique,  $L$  la longueur initiale (à  $V_0$ ),  $V_0$  la température initiale et  $V_a$  la température actuelle. La longueur à la température  $V_a$  est  $L + \Delta L$ . On entend par écart de température suffisamment faible, un écart de température tel que  $\alpha_V$  puisse être considéré comme constant (pas de changement de phase...) et que  $\Delta L \ll L$ .

Matériau	Module d'Young macroscopique (GPa)	Coef. de Poisson	Densité (kg / m <sup>3</sup> )	Coef. De dilatation linéaire (°C <sup>-1</sup> )	Conductivité thermique (W m <sup>-1</sup> °C <sup>-1</sup> )	Température de fusion (°C)
Al	68	0.33	2700	2.5 10 <sup>-5</sup>	210	660
Cu	110	0.34	8960	1.65 10 <sup>-5</sup>	385	1083
Fe	200	0.29	7870	1.2 10 <sup>-5</sup>	76	1535
Ti	116	0.34	4500	0.9 10 <sup>-5</sup>	17	1660
Zn	90	0.25	7100	3.1 10 <sup>-5</sup>	110	420
Pb	14	0.42	11340	2.9 10 <sup>-5</sup>	33	327
Sn	42	0.33	5765	2.4 10 <sup>-5</sup>	63	232
Béton hydraulique	20 à 40	0.18	2500	0.7 à 1.3 10 <sup>-5</sup>	1.75	≈ 1500
Bois // fibres	Isotrope transverse ≈ 10	Isot. tr. ≈ 0.45	400 à 1000	≈ 0.4 10 <sup>-5</sup> % humid.!	0.12 à 0.23	-
Polymères	< 3	0.3 à 0.5	900 à 1600	5 à 20 10 <sup>-5</sup>	0.1 à 0.4	100 à 250

Quelques caractéristiques physiques de matériaux à 20°C.

## 2.3. Elasticité linéaire – loi de Hooke

### 2.3.1. Elasticité isotrope

Lorsque la réponse à une sollicitation mécanique est indépendante de la direction de sollicitation, on dit que le comportement est isotrope. Dans le cas de l'élasticité linéaire isotrope, on peut relier les contraintes aux déformations à l'aide de deux paramètres indépendants du matériau, couple de paramètres à choisir selon la commodité parmi :

- module d'Young E et coefficient de Poisson  $\nu$  ( $\nu < 0.5$ ),
- coefficients de Lamé,  $\lambda$  et  $\mu$ ,
- modules de compressibilité K et de cisaillement G ( $G = \mu$ ).

Les relations suivantes relient ces paramètres :

$$G = \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \nu = 0.5 - \frac{G}{2K + 2G/3}$$

Lorsque le matériau est beaucoup souple en cisaillement que sous contrainte hydrostatique alors on dit qu'il se déforme à volume quasi-constant et  $\nu \approx 0.5$ . La loi de Hooke est telle que :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{Id}}$$

$$\varepsilon_{ij} = (1 + \nu)/E \sigma_{ij} - \delta_{ij} \nu/E (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \Leftrightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = (1 + \nu)/E \underline{\underline{\sigma}} - \nu/E \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{Id}}$$

### 2.3.2. Thermo-élasticité isotrope

La déformation liée à la sollicitation mécanique s'additionne à celle d'origine thermique. Si  $\alpha_{LT}$  est le coefficient linéique de dilatation thermique à la température V, alors il vient :

$$\varepsilon_{ij}^{\text{méca.}} = \varepsilon_{ij}^{\text{total}} - \alpha_{LT} \Delta V \delta_{ij} = (1 + \nu)/E \sigma_{ij} - \delta_{ij} \nu/E (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}^{\text{méca.}} + \delta_{ij} \lambda (\varepsilon_{11}^{\text{méca.}} + \varepsilon_{22}^{\text{méca.}} + \varepsilon_{33}^{\text{méca.}}) =$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu (\varepsilon_{ij}^{\text{total}} - \varepsilon_{ij}^{\text{thermique}}) + \delta_{ij} \lambda ((\varepsilon_{11}^{\text{total}} - \varepsilon_{11}^{\text{thermique}}) + (\varepsilon_{22}^{\text{total}} - \varepsilon_{22}^{\text{thermique}}) + (\varepsilon_{33}^{\text{total}} - \varepsilon_{33}^{\text{thermique}}))$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu (\varepsilon_{ij}^{\text{total}} - \alpha_{LT} \Delta T \delta_{ij}) + \delta_{ij} \lambda (\varepsilon_{11}^{\text{total}} + \varepsilon_{22}^{\text{total}} + \varepsilon_{33}^{\text{total}} - 3\alpha_{LT} \Delta V)$$

*NB. Le coefficient volumique de dilatation thermique  $\alpha_{VT}$  vaut  $3\alpha_{LT}$ .*

### 2.3.3. Elasticité anisotrope

Lorsque la réponse à une sollicitation mécanique est dépendante de la direction de sollicitation, on dit que le comportement est anisotrope. Dans le cas du bois, il s'agit d'un comportement orthotrope – 3 directions à considérer - et il y a neuf paramètres indépendants pour définir l'élasticité. On peut éventuellement simplifier en moyennant le comportement perpendiculairement aux fibres – 2 directions à considérer – ce qui revient à considérer que le comportement est isotrope transverse et il ne reste que cinq paramètres indépendants.

### 2.3.4. Limite élastique et critères de plasticité

La limite élastique est souvent mesurée en traction uniaxiale. Ceci correspond, par exemple, au cas particulier de l'état de contrainte dans une poutre fléchie en absence d'effort tranchant significatif. Dans le cas général, il faut considérer que le matériau est dans un état de contrainte triaxial et être capable de définir sa limite élastique. Pour les métaux, par exemple, les critères de plasticité sont indépendants de la pression hydrostatique, i. e. seuls les cisaillements interviennent dans le critère<sup>5</sup>. Chaque fois que l'on peut, si cela suffit convenablement, on utilise commodément une variable scalaire issue du tenseur des contraintes pour définir la limite

<sup>5</sup> Cette quasi-insensibilité à la pression hydrostatique n'est généralement pas le cas des sols ou des polymères dont les critères sont dits piézo-dépendants.

élastique. Les critères les plus classiquement utilisés sont celui de Tresca, associé à la plus grande contrainte de cisaillement, et celui de von Mises, associé à l'énergie de cisaillement. Dans le repère principal des contraintes ces critères s'expriment :

$$\text{Critère de Tresca : } (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 < f_e \Leftrightarrow \text{élasticité}$$

$$\text{Critère de von Mises : } \sqrt{1/2\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2\}} < f_e \Leftrightarrow \text{élasticité}$$

où  $f_e$  désigne la limite élastique en traction et  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  désignent les contraintes dans le repère principal.

$$\text{Critère de Mohr- Coulomb : } |\tau_n| < \mu \sigma_n + c \Leftrightarrow \text{élasticité}$$

où  $\mu = \tan \phi$  désigne un frottement interne et  $c$  une cohésion. Ce critère est parfois utilisé pour les sols à la limite des formalismes de plasticité et rupture, voir TD. Ce critère fait intervenir la pression.

**Exemple.** Considérons une poutre fléchie par un moment fléchissant  $M_{3G}$  et soumise à un effort tranchant  $V(x_1)$  et à un effort normal  $N(x_1)$ . En utilisant les notations usuelles du cours de résistance des matériaux, si la théorie des poutres s'applique, on peut écrire que :

$$\sigma = \frac{N(x_1)}{A} - \frac{M_{3G}(x_1) x_2}{I_{3G}}$$

et que :

$$\tau = \frac{V(x_1) S(x_2, v)}{b(x_2) I_{3G}}$$

à une altitude  $x_2$  dans la poutre à une abscisse  $x_1$ . On calcule ensuite les contraintes principales qui valent  $\sigma_1 = 1/2\{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}\}$ ,  $\sigma_2 = 0$  et  $\sigma_3 = 1/2\{\sigma - \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}\}$  dans ce cas particulier où les contraintes autres que  $\sigma$  et  $\tau$  sont nulles. Enfin, on calcule la combinaison de ces contraintes qui correspond au critère convenable pour le métal utilisé (von Mises le plus souvent pour les aciers) que l'on compare à la donnée matériau  $f_e$ , mesurée en laboratoire. Cet exemple permet de comprendre les règles de calcul aux ELU (couplages entre  $M_{ELU}$ ,  $V_{ELU}$  et  $N_{ELU}$ ) en construction métallique.

## 2.4. Rupture

### 2.4.1. Rupture sous chargement monotone

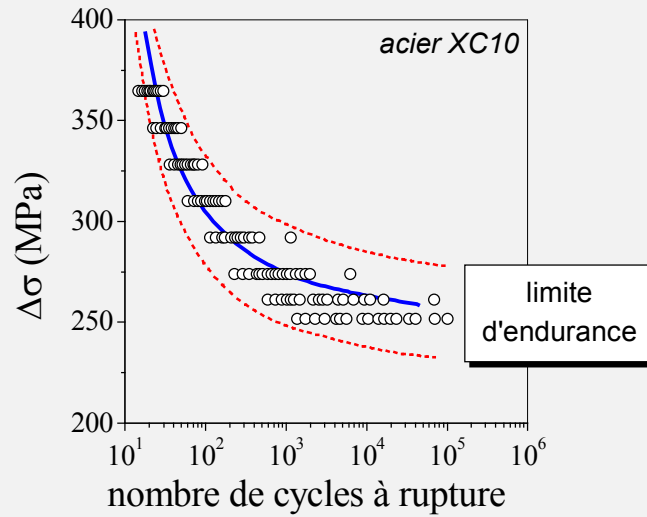
On ne peut mesurer le comportement ultime d'un matériau qu'en allant jusqu'à la rupture. Lorsque, par exemple, on mesure l'allongement à rupture d'une éprouvette de traction, les résultats d'essai peuvent s'avérer peu reproductibles, d'autant plus que les matériaux sont fragiles. En effet, dans les solides, une fissure finit par apparaître en s'amorçant sur un défaut soit intrinsèque à la matière (impureté, cavité, ...), soit extrinsèque (usinage, rayure, ...). Le comportement ultime de la matière en sommet de fissure n'est donc mesurable qu'au travers de la réponse d'une structure fissurée. Pour tenter de s'affranchir des défauts préexistants, on peut en générer un de taille contrôlée en procédant à une entaille dans l'échantillon. Ceci permet de mesurer la *ténacité* du matériau. Toutefois, l'étude de la rupture sous chargement monotone demeure une affaire de spécialistes.

### 2.4.2. Rupture sous chargement cyclique, fatigue

On désigne par fatigue l'endommagement des matériaux sous sollicitations mécaniques cycliques, alternées ou simplement variables. En laboratoire, on caractérise les matériaux à la fatigue presque toujours avec des sollicitations cycliques<sup>6</sup>. Lorsque le matériau est sollicité au-delà

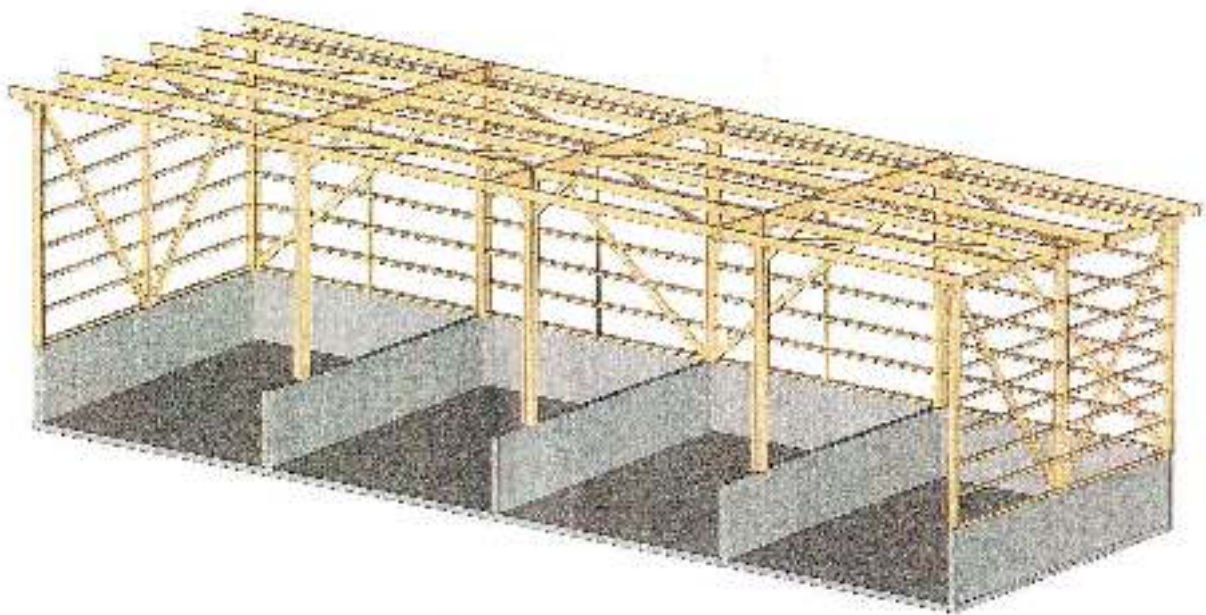
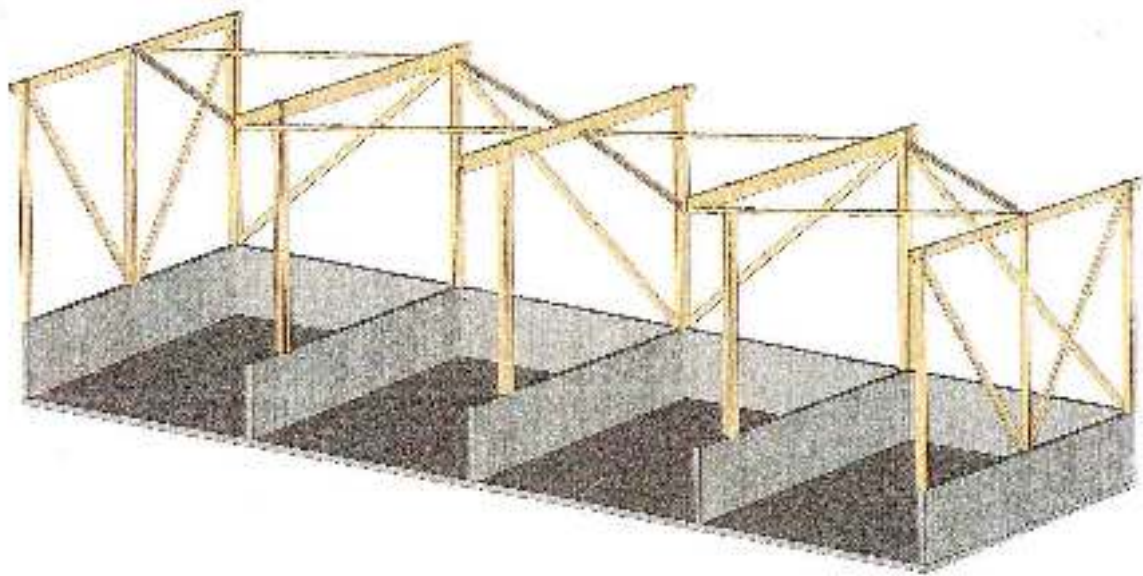
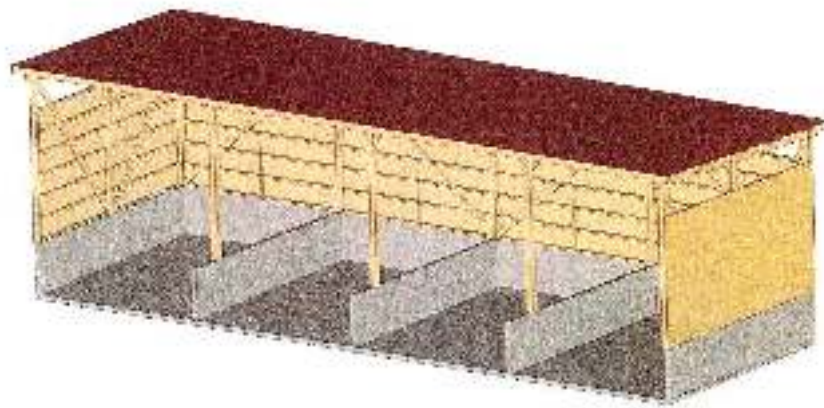
<sup>6</sup> On remarque que, la plupart du temps, comme dans le cas des séismes par exemple, ce ne sont pas les données matériaux qui manquent mais le spectre de la sollicitation qui est méconnu.

de sa limite élastique, le nombre de cycles à rupture est faible et l'on parle de fatigue oligocyclique. Certains matériaux admettent une limite d'endurance, c'est à dire qu'il existe une sollicitation en dessous de laquelle la rupture n'est jamais observée. La rupture, lorsqu'elle intervient, s'amorce sur des défauts intrinsèques (microfissure, crique...) ou extrinsèques (rayure, poinçonnement...) qui croissent jusqu'à la ruine de la structure. On représente souvent la tenue en fatigue à l'aide de courbe de Wöhler.

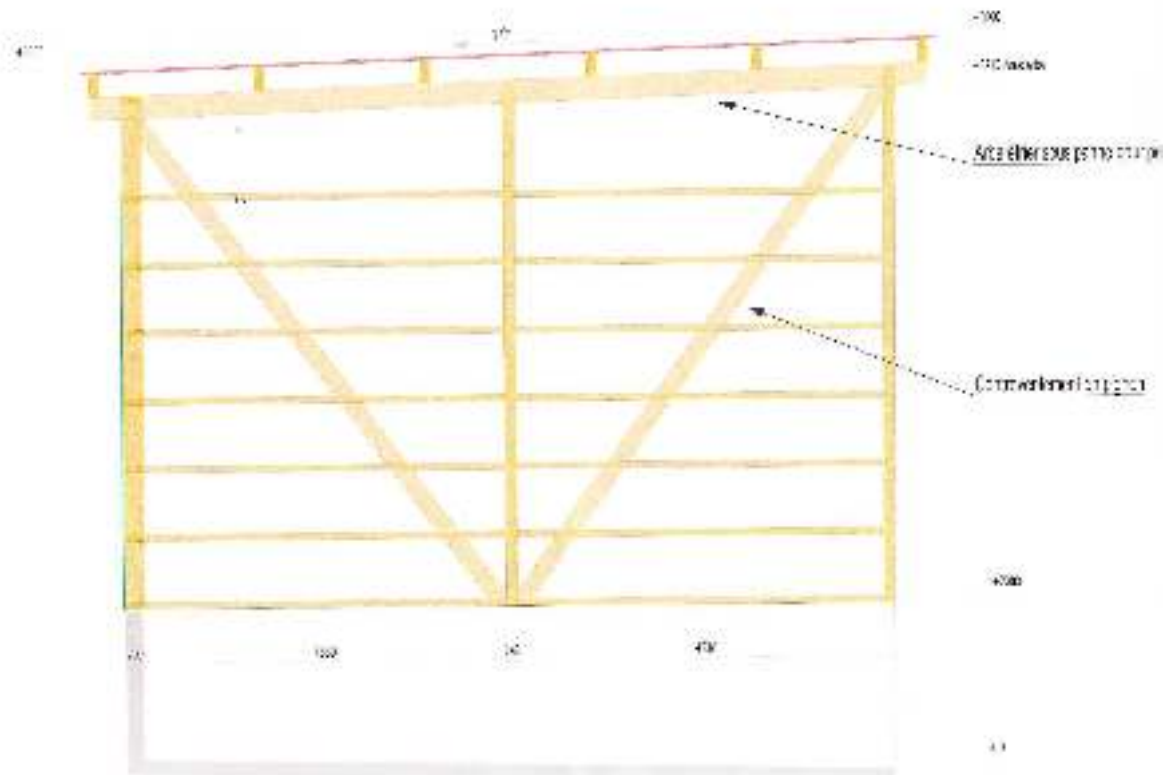


*Courbe de Wöhler illustrant des résultats d'essais de fatigue.*

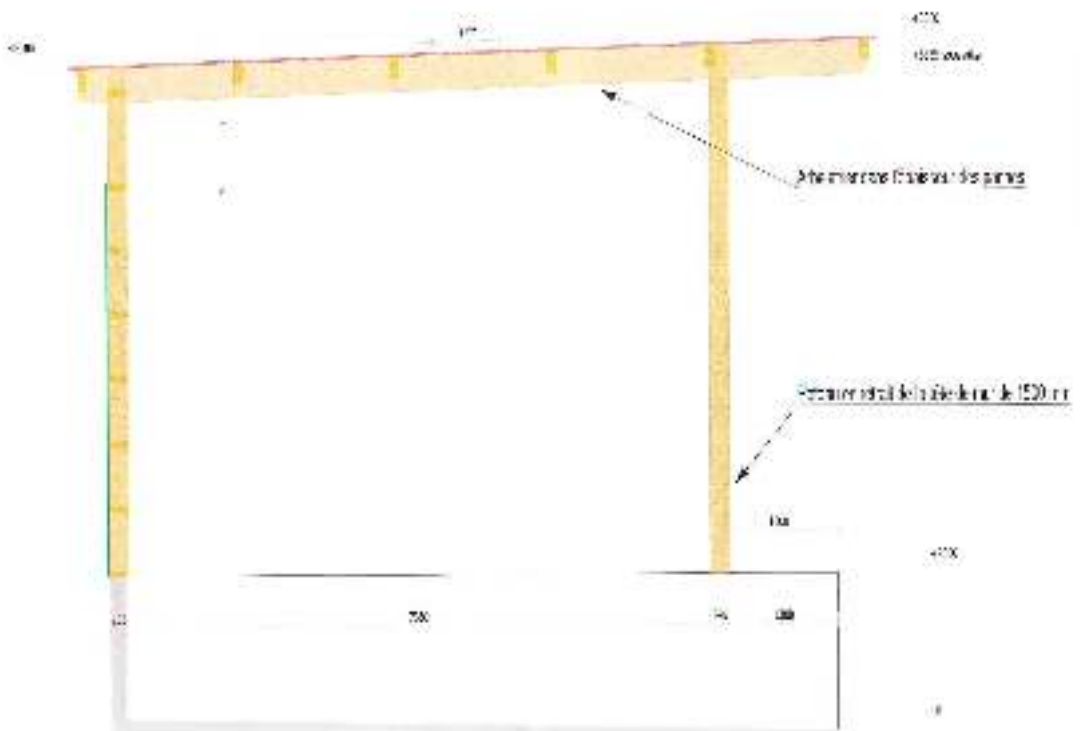
### 3. Exemples de réalisations



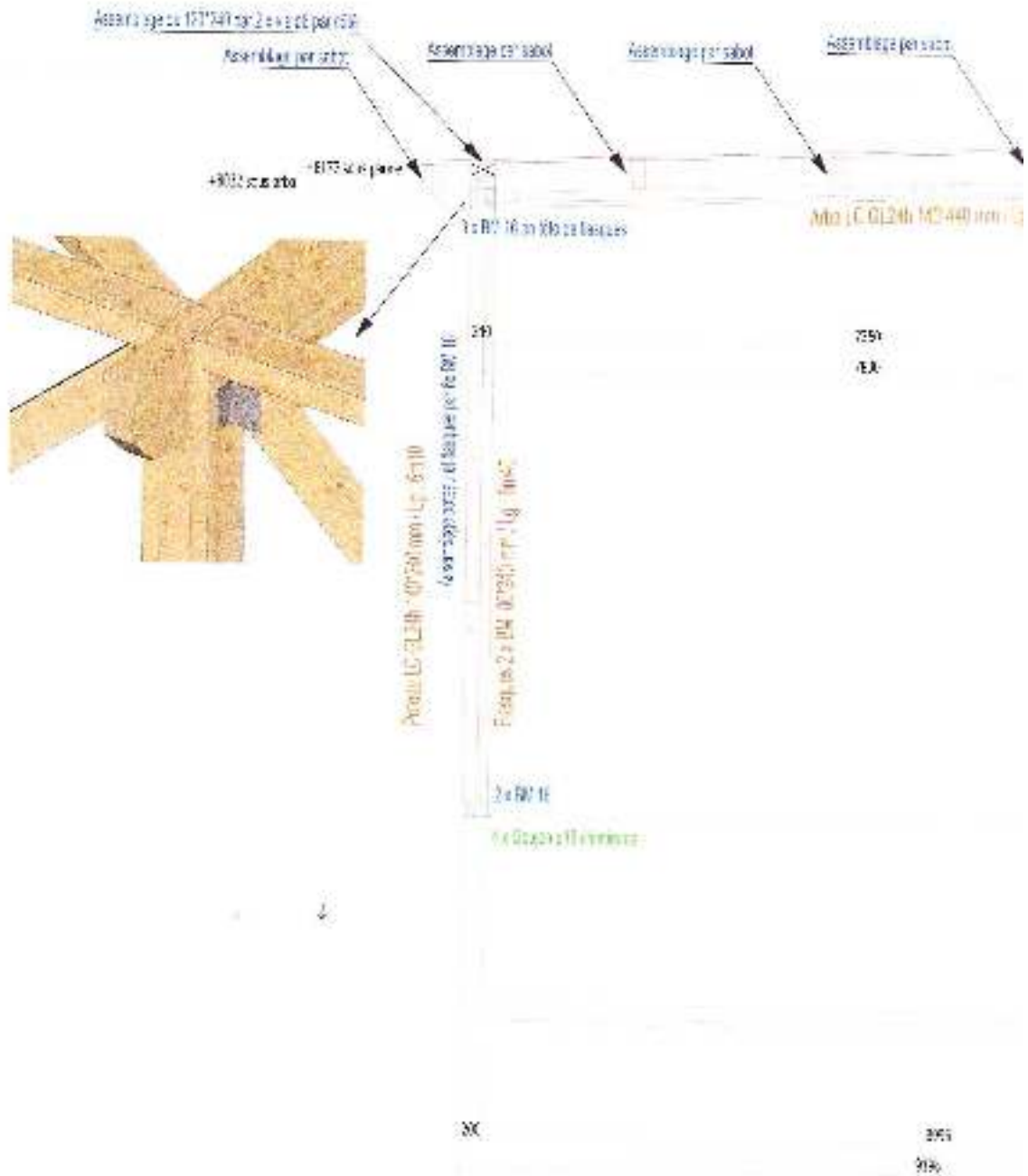
### Coupe sur pignon



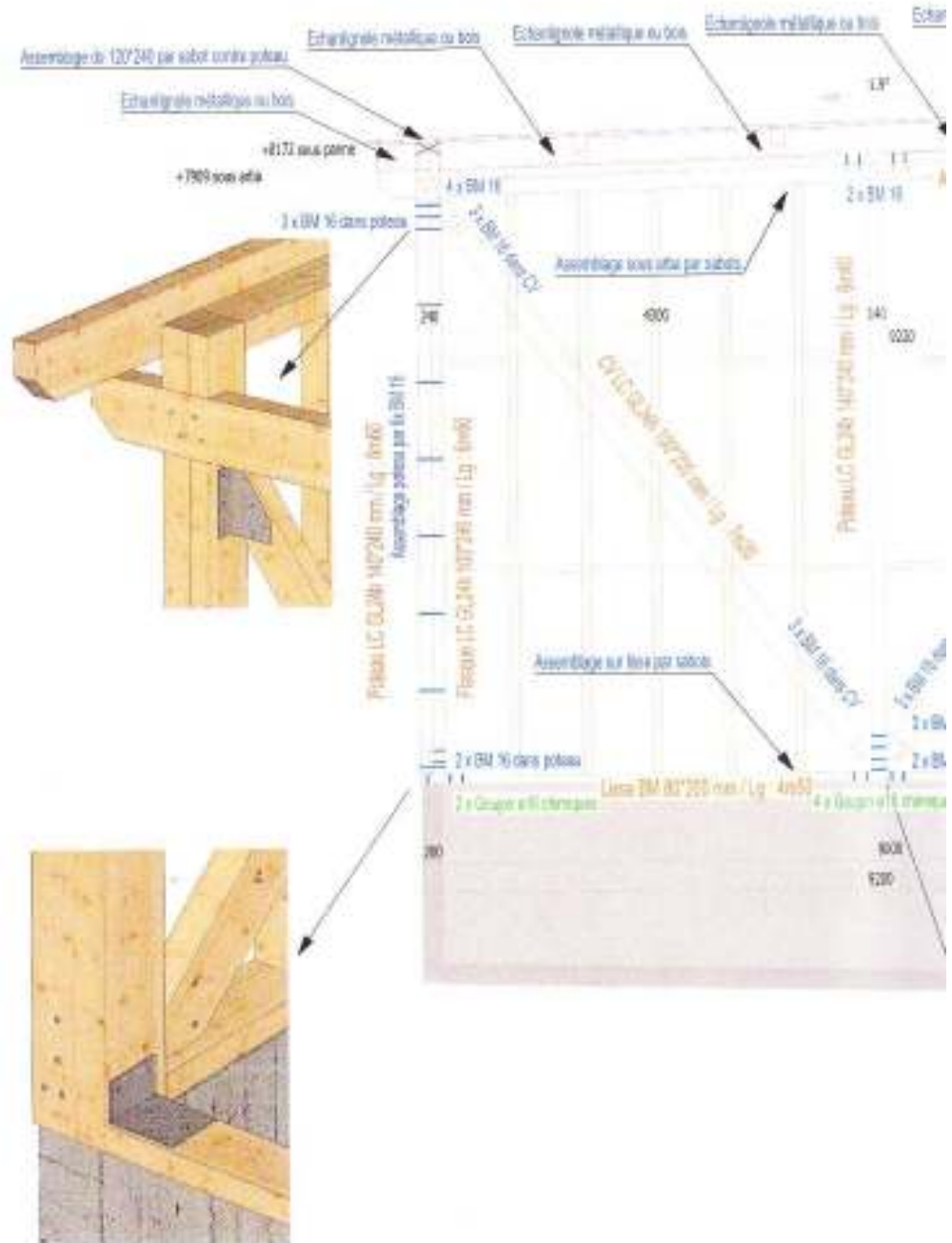
### Coupe sur ferme intermédiaire



## Ferme intermédiaire :



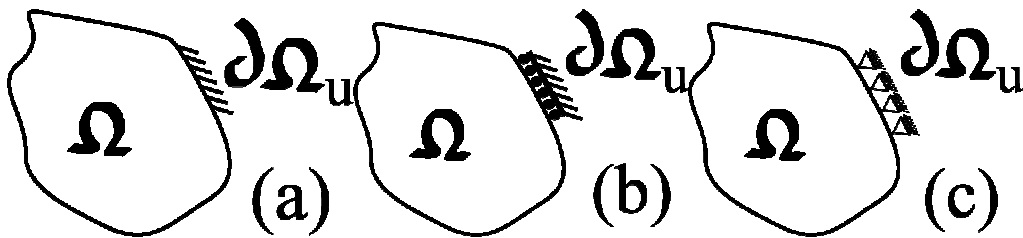
# Pignon :



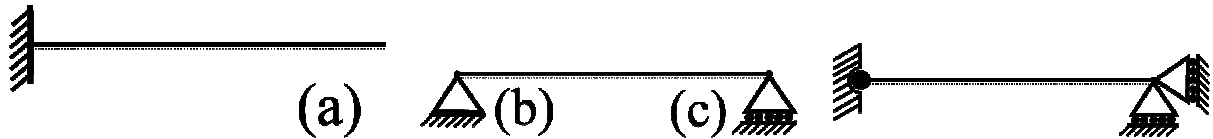


## 4. Modélisation des conditions aux limites

### 4.1. Déplacements imposés



en 3D : (a) – encastrement, (b) – appui glissant, (c) – appui glissant



poutres et structures : (a) – encastrement, (b) – appui simple, (c) – appui glissant

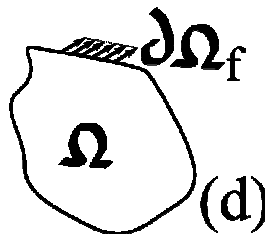
Encastrement : rotation et déplacements nuls, 3 composantes  $R_1$ ,  $R_2$  et  $C_3$  de réaction d'appui à déterminer.

Appui simple : déplacements nuls, 2 composantes  $R_1$  et  $R_2$  de la réaction d'appui à déterminer.

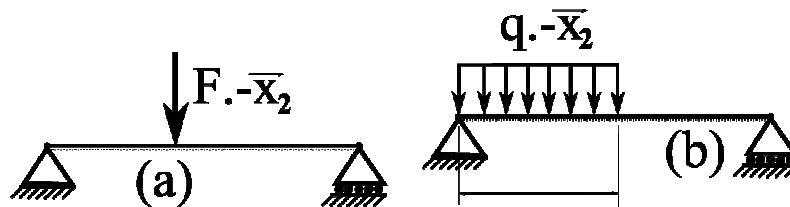
Appui glissant : 1 composante de déplacement nulle, 1 composante  $R_2$  de la réaction d'appui à déterminer.

### 4.2. Pression, contraintes imposées, surface libre

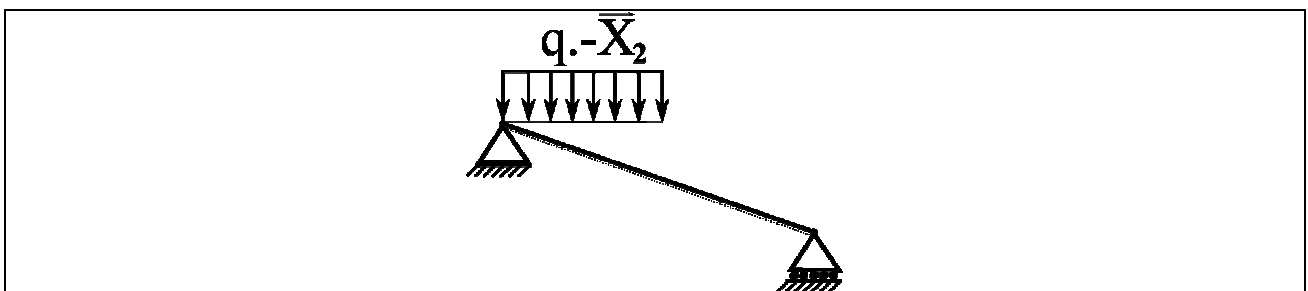
Lorsque rien n'est spécifié, la surface est libre de contrainte, i. e. les composantes normales  $\sigma$  et tangentielles  $\tau$  du vecteur contrainte sont nulles. Lorsque seule la composante normale est non nulle, il s'agit d'une pression.



en 3D : (d) – densité surfacique de forces.



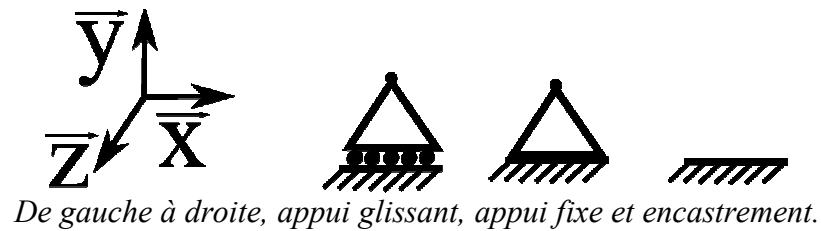
poutres et structures : (a) – charge ponctuelle, (b) – charge uniformément répartie



### **4.3. Liaisons extérieures**

Les trois principaux type de liaison extérieure pour les problèmes plans sont

- l'appui glissant qui empêche un déplacement – selon  $y$  sur la figure suivante - ,
- l'appui fixe qui empêche les deux composantes de déplacements dans le plan,
- l'encastrement glissant qui empêche les deux composantes de déplacements dans le plan et la rotation – selon  $z$  sur la figure suivante - ,



*Réalisation pratique d'un appui glissant pour un pont métallique de chemin de fer.*

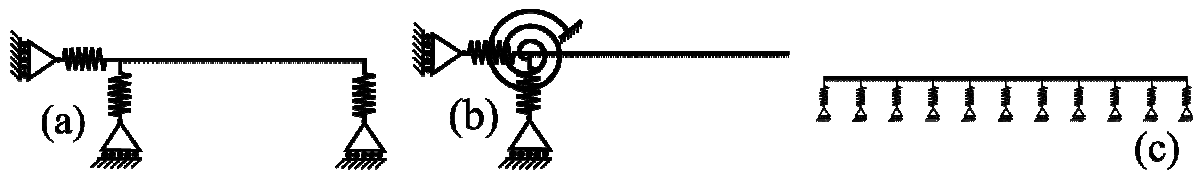
Les liaisons peuvent être idéales comme par exemple celles du Centre Pompidou de Paris ou plus approximatives et bien plus économiques comme dans la plupart des cas pratiques.



*Appuis fixes ou rotules en construction métallique réalisations idéales et réalisation économique courante.*

#### **4.4. Appuis élastiques**

En toute rigueur, aucune liaison n'est parfaite. Toutefois, on peut souvent – cas isostatique par exemple - procéder en deux étapes si nécessaire, c'est à dire dissocier la déformation des liaisons du calcul des déformations dans la structure.



*poutres et structures : (a) – appuis élastiques, (b) – encastrement élastique, (c) – massif élastique*

#### **4.5. Liaisons intérieures**

Les liaisons intérieures reprennent les mêmes principes que les liaisons extérieures, c'est à dire transmission ou non des deux composantes d'une force et/ou d'un couple. Elles sont souvent approximatives d'un point de vue constructif. La modélisation simplifie la réalité.

##### **4.5.1. Cas de la construction métallique**

L'effort tranchant est transmis essentiellement par l'âme des profilés en I. Le moment fléchissant est transmis essentiellement par les semelles. La rigidité en torsion est relativement faible et on évite en général de solliciter en torsion.



*Constructions métalliques.  
espace dessin, liaison âme et liaison semelles*

#### **4.5.2. Cas du béton armé et/ou précontraint**

Le dimensionnement des éléments en béton armé et/ou précontraint nécessite un approfondissement supplémentaire à ce cours. En effet, il s'agit d'un matériau composite dont la plus grande longueur interne est proche d'une ou des dimensions des sections.



*Ferrailage.  
espace dessin, continuité ou non des armatures*



*Béton armé préfabriqué.*

### 4.5.3. Cas de la construction en bois – lamellé collé

L'effort tranchant est transmis majoritairement par le centre des sections. Le moment fléchissant est transmis majoritairement par les extrémités. La rigidité en torsion est relativement faible et on évite en général de solliciter en torsion.



*Lamellé collé*

*espace dessin, transmission des contraintes par connecteurs*

#### 4.5.4. Cas de la construction mixte



*Ponts à haubans*



*Construction mixte acier-béton.*

#### 4.6. Remarques

Le choix des liaisons est en général fait par l'ingénieur des structures en bureau d'étude, en respect des volontés de l'architecte. Ce choix repose sur plusieurs critères dont essentiellement la sécurité et le prix. Par exemple, on se prémunira au mieux des dilatations thermiques différentielles, d'un éventuel tassement différentiel des appuis, du report des charges en cas de ruine d'un des éléments de structure. Des dispositions parasismiques sont prévues dans les réglementations. L'utilisation optimale de la matière conduira aussi le choix des liaisons. Toutefois il faut de plus compter dans le prix de la structure les coûts des assemblages et des phases de construction.

### 5. Spécificités de la théorie des poutres

#### 5.1. Poutre – barre

##### 5.1.1. Définition

Poutre : objet géométrique généré par une section perpendiculaire à une fibre moyenne, les dimensions de la section étant petites devant la longueur de la fibre. Le rayon de courbure doit être grand relativement à la longueur de la fibre. La poutre est dite droite si la fibre moyenne est rectiligne.

Barre : poutre droite non fléchie.

Pour la suite, on se limitera aux poutres droites et aux structures bidimensionnelles.

##### 5.1.2. Equilibre des poutres et barres

Moment d'une force appliquée en P dans le plan  $(x_1, x_2)$  par rapport à O :  $M_{3O} = \mathbf{OP} \wedge \mathbf{F}_P$

Il suffit d'appliquer le V. P. V. avec un mouvement de solide (translation, rotation) à une structure pour se persuader que l'équilibre sera assuré si :

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$$

$$\sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_{\text{ext}}) = \mathbf{0}, \text{ pour un point } O \text{ quelconque.}$$

Dans un plan, cela fournit  $2 + 1 = 3$  équations, dans l'espace  $3 + 3 = 6$  équations. Ces équations découlent du P. V. V. donc du principe  $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{0}$ .

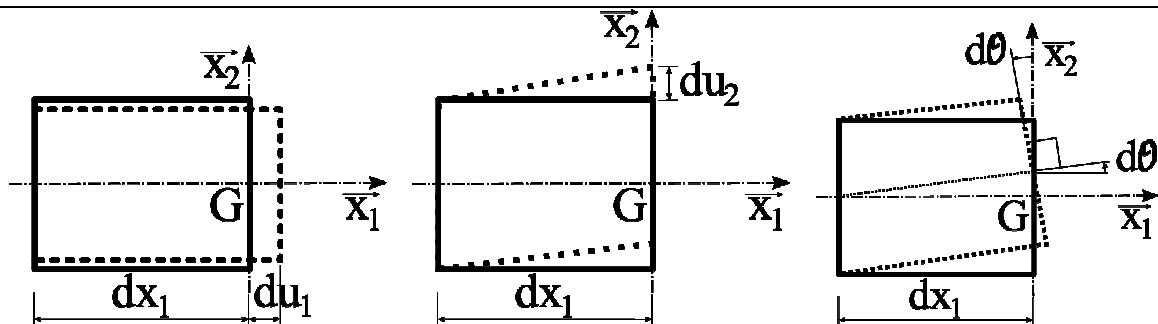
**Démonstration :** supposons les forces inertielles négligeables. Soit  $\mathbf{v}$  un champ de vitesses virtuel uniforme quelconque. Dans un mouvement de solide rigide, la puissance des efforts extérieurs est nulle, i. e.  $P_{\text{ext}} = \sum \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v} dt = 0$ . Comme  $\mathbf{v}$  est uniforme, on peut écrire  $P_{\text{ext}} = \mathbf{v} dt \cdot \sum \mathbf{F}_i = 0$ . Si  $P_{\text{ext}} = 0$  quel que soit  $\mathbf{v}$  non nul alors  $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ . Soit  $\omega$  une vitesse de rotation virtuelle quelconque autour d'un point  $O$  quelconque. La vitesse d'un point  $P_i$  vaut  $(\omega \wedge \mathbf{OP}_i)$ . De même  $P_{\text{ext}} = \sum \mathbf{F}_i \cdot (\omega \wedge \mathbf{OP}_i) dt = 0$  en absence de déformation virtuelle. Le produit mixte est invariant par permutation circulaire donc  $P_{\text{ext}} = \sum \omega \cdot (\mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{F}_i) dt = \omega dt \cdot \sum (\mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{F}_i)$ . Si  $P_{\text{ext}} = 0$  quel que soit  $\omega$  non nul alors  $\sum (\mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{F}_i) = 0$ .

Si les équations d'équilibre permettent de tout (réactions d'appui, déplacements, contraintes et déformations) déterminer partout dans la structure, alors elle est dite *isostatique*. Si ces équations d'équilibre global ne suffisent pas, elle est dite *hyperstatique*.

## 5.2. Hypothèse de Navier-Bernoulli

### 5.2.1. Cinématique

Les sections droites restent droites. Cette hypothèse fournit une approximation de qualité d'autant plus excellente que la hauteur de la poutre est petite par rapport à sa longueur. On peut aisément vérifier expérimentalement ou par modélisation numérique que cette hypothèse est très proche de la réalité, même lorsqu'on dépasse modérément la limite de linéarité du comportement.



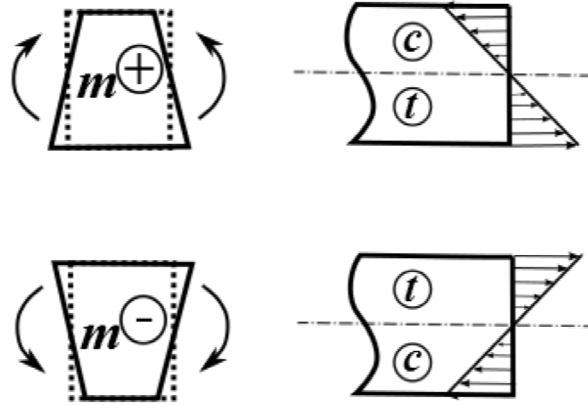
*Cinématiques possibles si les section droites restent droites.  
espace dessin, allongement – raccourcissement des fibres*

### 5.2.2. Déformation d'une section

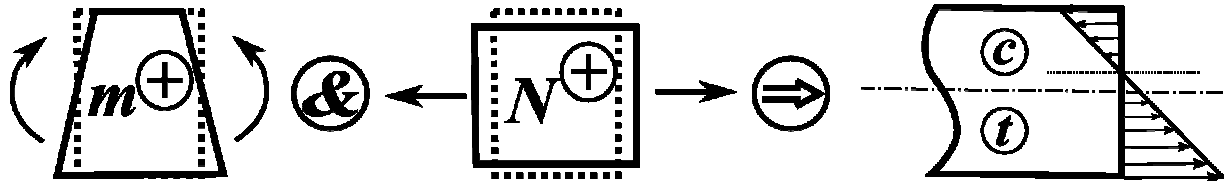
Le rayon de courbure  $R$  est tel que  $dx_1 = R \sin d\theta \approx R d\theta$ , i. e.  $1/R = d\theta/dx_1$ . Le déplacement en  $(x_1 + dx_1, x_2)$  vaut donc  $(-x_2 \sin d\theta, R - R \cos d\theta)$  soit, pour des grandes courbures  $(-x_2 d\theta, R(1 - (1 - d\theta^2/2))) = (-x_2 d\theta, dx_1 d\theta/2) \approx (-x_2 d\theta, 0)$  au premier ordre. L'allongement ou

raccourcissement d'une fibre située en  $x_2$  vaut donc  $\varepsilon_{11} = -x_2 d\theta/dx_1$ . Les déformations longitudinales varient linéairement dans la section.

*espace dessin et calculs, géométrie en flexion circulaire*



*Distribution des contraintes normales en flexion pure. La fibre neutre (contrainte normale nulle) est confondue avec la fibre moyenne.*



*Exemple de distribution des contraintes normales en flexion composée. La fibre neutre n'est plus confondue avec la fibre moyenne.*

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) = \frac{N(x_1)}{A(x_1)} - \frac{M_{3G}(x_1) x_2}{I_{3G}(x_1)}$$

*Où  $N$  est positif en traction. En notation  $(x, y, z)$  avec  $A$  et  $I_{3G}$  constants et avec la notation simplifiée de la théorie des poutres pour les contraintes, on réécrit :*

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A} - \frac{M(x) y}{I_{Gz}}$$

*La contrainte maximale en valeur absolue se situera soit en  $y_{min}$ , noté  $v'$ , soit en  $y_{max}$  noté  $v$ , selon les signes de  $N$  et  $M$ .*

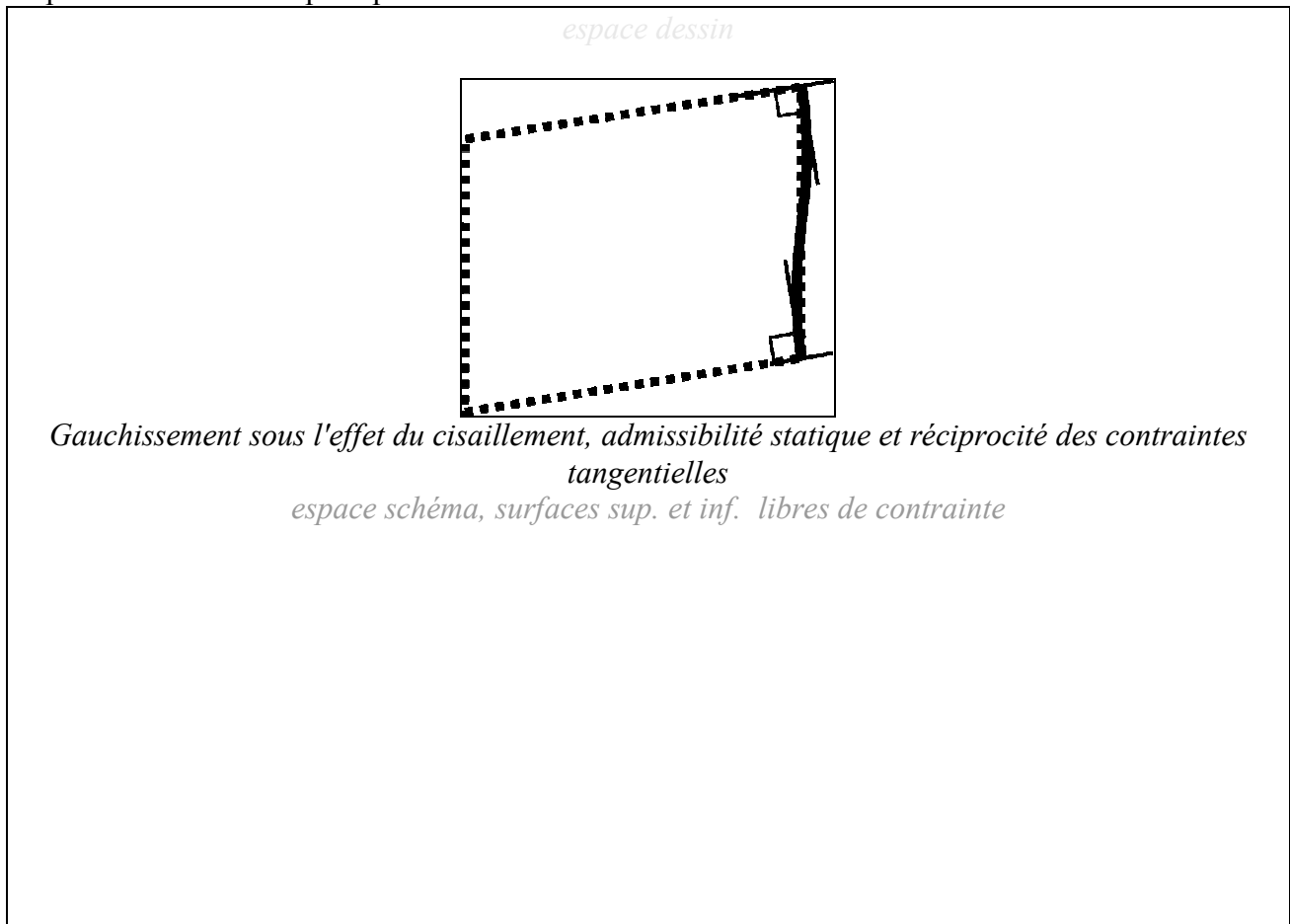
$$|\sigma|_{\max} = \sup \left\{ \left| \frac{N}{A} - \frac{M v'}{I_{Gz}} \right|, \left| \frac{N}{A} - \frac{M v}{I_{Gz}} \right| \right\}$$

### 5.2.3. Admissibilité

L'hypothèse des sections droites est cinématiquement admissible. La loi de comportement du matériau est respectée. Si les contraintes étaient statiquement admissibles, alors sous les H. P. P. en élasticité linéaire, on obtiendrait ainsi l'unique et exacte solution du problème, loin des points d'application des charges. Mais ce n'est pas le cas, la solution proposée n'est pas



statiquement admissible. Pour s'en convaincre, il faut étudier de plus près le cisaillement. On se reportera aux annexes pour plus de détails.



### 5.3. Principe de *S' Venant*, torseur généralisé

#### 5.3.1. Equilibre d'une section

Concernant l'équilibre d'une structure soit on postule le principe l'équilibre des forces et des moments directement sur la structure, soit on postule le principe des puissances virtuelles (P. P. V.) et on démontre le théorème de l'équilibre des forces et des moments sur la structure. Pour cette dernière démonstration, il suffit d'imposer des champs « rigidifiants » de translations et rotations<sup>7</sup>.

Pour des raisons évidentes, la théorie des poutres ne peut donner de résultats satisfaisants au voisinage des points d'application des forces. Par contre, loin des points d'application des forces, l'action sur une section de poutre peut se résumer à un torseur résultant (effort Normal, effort tranchant, Moment fléchissant). Pour une structure plane, ce torseur pourra être calculé en isolant la partie droite - ou gauche selon la convention arbitraire que l'on se fixe – à partir de la section dans laquelle on désire connaître la répartition des contraintes. En utilisant la cinématique simplifiée des sections qui restent droites, on peut, donc en utilisant les conditions d'équilibre et la loi de comportement retrouver les équations de la théorie des poutres. On rappelle que les H. P. P. sont faites et que le comportement du matériau est élastique linéaire. Pour plus de commodité, on se situera au niveau de la fibre moyenne de la section de la poutre située en G d'ordonnée  $x_{2G}$ .

Si l'on considère une section quelconque, l'action étant égale et opposée à la réaction en vertu de l'équilibre, on peut écrire :

<sup>7</sup> Notons que l'on a choisi de démontrer le théorème des puissances virtuelles (T. P. V.) à partir du principe de l'équilibre des forces et des moments sur un élément de volume.

$$\sum \mathbf{F}_i \text{ à gauche} + \sum \mathbf{F}_i \text{ à droite} = \mathbf{0}$$

$$\sum \mathbf{GP}_i \wedge (\mathbf{F}_i \text{ à gauche}) + \sum \mathbf{GP}_i \wedge (\mathbf{F}_i \text{ à droite}) = 0$$

En isolant la partie gauche de la structure, on peut écrire l'équilibre ainsi :

$$\sum \mathbf{F}_i \text{ à gauche} + \mathbf{N}(x_1) \mathbf{x}_1 + \mathbf{V}(x_1) \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$$

$$\sum \mathbf{GP}_i \wedge (\mathbf{F}_i \text{ à gauche}) + M_{3G}(x_1) = 0$$

où N représente la force résultante des contraintes normales, V celle des contraintes tangentielles et M le couple en G résultant des contraintes normales. Défini ainsi, le torseur résultant (N, V, M) correspond donc au torseur résultant des forces extérieures à droite qui doit équilibrer celui de gauche impliqué dans les équations ci-avant.

*espace dessin, sous-structure isolée et efforts intérieurs reportés*

### 5.3.2. Relation entre l'effort tranchant et le moment fléchissant

$$\partial M_{3G}(x_1) / \partial x_1 = -V(x_1)$$

*espace dessin et calculs, section en équilibre*

### 5.3.3. Répartition des contraintes dans une section

#### 5.3.3.1. Contraintes normales

On considérera que  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$  et aussi que  $\sigma_{22} = 0$  (en rapport avec l'hyp. de  $S^V$  Venant). Les intégrales des contraintes réparties dans la section doivent correspondre à ces résultantes.

$$\partial u(x_1) / \partial x_1 = N(x_1) / E(x_1) A(x_1)$$

$$\partial \theta(x_1) / \partial x_1 = M_{3G}(x_1) / E(x_1) I_{G3}(x_1)$$

$$\sigma(x_1, x_2) = -x_2 M_{3G}(x_1) / I_{G3}(x_1) + N(x_1) / A$$

*espace dessin et calculs, superposition des contraintes et déformations*

### 5.3.3.2. Moment quadratique et théorème d'Huygens

$$I_{G3} = \iint_A x_2^2 dx_2 dx_3 = \int_{V_{\text{inf.}}}^{V_{\text{sup.}}} x_2^2 b(x_2) dx_2$$

où G est la position de la fibre moyenne telle que  $\int_{V_{\text{inf.}}}^{V_{\text{sup.}}} x_2 b(x_2) dx_2 = 0$ . Ainsi défini, toute rotation différentielle  $\partial\theta/\partial x_1$  autour de G ne génère d'effort normal. Si l'origine O du repère n'est pas en fibre moyenne, on peut calculer ainsi le moment quadratique de A par rapport à O :

$$I_{O3} = I_{G3} + \|OP\|^2 A$$

où A est l'aire de la section A, i. e.  $A = \int_{V_{\text{inf.}}}^{V_{\text{sup.}}} b(x_2) dx_2$ .

Démonstration :

$$I_{O3} = \int_{V_{\text{inf.}}}^{V_{\text{sup.}}} x_2^2 b(x_2) dx_2$$

$$I_{O3} = \int_{V_{\text{inf.}}}^{V_{\text{sup.}}} (x_2 - x_{G2})^2 b(x_2) dx_2 + \int_{V_{\text{inf.}}}^{V_{\text{sup.}}} (2 x_2 x_{G2} - x_{G2}^2) b(x_2) dx_2$$

$$I_{O3} = I_{G3} + x_{G2} \left\{ \int_{V_{\text{inf.}}}^{V_{\text{sup.}}} 2 (x_2 - x_{G2}) b(x_2) dx_2 + x_{G2} \int_{V_{\text{inf.}}}^{V_{\text{sup.}}} b(x_2) dx_2 \right\}$$

$$I_{O3} = I_{G3} + x_{G2}^2 A$$

*espace dessin et calculs, intégrations sur une section*

### 5.3.3.3. Effort normal et Moment fléchissant

En béton armé par exemple, il peut parfois être commode de calculer le torseur résultant en un point O, choisi comme origine des  $x_2$ , qui n'est pas situé en la fibre moyenne. En intégrant les contraintes dans la section, il apparaît que :

$$N_P(x_1) = N_G(x_1)$$

$$M_P(x_1) = M_G(x_1) - x_{G2} N_G(x_1)$$

*espace dessin et calculs, exemple pour une section de béton armé*

### 5.3.3.4. Contraintes tangentielles

$$\tau(x_1, x_2) = V(x_1) S(x_1, x_2) / I_{G3}(x_1) b(x_1, x_2)$$

*espace dessin et calculs, équilibre  $\partial M / \partial x_1$  et fibres supérieures entre  $x_2$  et  $v_{sup}$ .*

### 5.3.3.5. Diagrammes de sollicitations

Poutre sur deux appuis avec une force  $F$   $-x_2$  appliquée en son milieu :

$$\text{Equilibre : } R_{A1} = 0, \quad R_{A2} + R_{B2} - F = 0, \quad R_{B2} l - F l/2 = 0$$

$$N_{AB}(x_1) = 0$$

$$V_{AC}(x_1) = F / 2, \text{ pour } x_1 \in [0, l/2] \quad V_{CB}(x_1) = F / 2, \text{ pour } x_1 \in [l/2, l]$$

$$M_{AC}(x_1) = F x_1 / 2, \text{ pour } x_1 \in [0, l/2] \quad M_{CB}(x_1) = F (l - x_1) / 2, \text{ pour } x_1 \in [l/2, l]$$

*espace dessin et calculs, diagrammes  $N$ ,  $V$  &  $M$*

### 5.3.4. Déformation d'une poutre

Pour calculer la déformée d'une structure, il faut intégrer les déformations le long des poutres et identifier les constantes d'intégrations à l'aide des conditions de liaison aux extrémités de chaque poutre. En pratique, il n'est pas nécessaire de prendre en compte les déformations d'effort normal et tranchant dans les éléments fléchis.

$$\text{Déformation liée à l'effort normal : } \partial u_1 / \partial x_1 = \varepsilon_{11}(x_1) = N(x_1) / E(x_1) A(x_1) \quad \text{noté } \varepsilon(x_1)$$

$$\text{Déformation liée à l'effort tranchant : } \partial u_2 / \partial x_1 = \gamma_{12}(x_1) = V(x_1) / \mu(x_1) S_r(x_1) \quad \text{noté } \gamma(x_1)$$

$$\text{Déformation liée au moment fléchissant : } y''(x_1) = \partial \theta / \partial x_1 = 1 / R(x_1)$$

$$E(x_1) I_{G3}(x_1) y''(x_1) = M_{3G}(x_1)$$

### 5.3.5. Remarque

La théorie des poutres permet de réduire d'une dimension les problèmes à résoudre. Plus exactement, les variables  $x_1$  et  $x_2$  sont dissociées et interviennent successivement. En effet, on commence par résoudre des problèmes dont la variable est  $x_1$  le long de la fibre moyenne. Ensuite, pour connaître la distribution des contraintes dans une section située en  $x_1$  donné, la variable est  $x_2$ . Ceci fournit des résultats très satisfaisants « loin » - typiquement on écarte la section de  $(x_1 - h)$  à  $(x_1 + h)$  où  $h$  est la hauteur de la section de poutre - des points d'application des forces. Dans ces sections, les problèmes de répartitions des contraintes sont 2-D, voire 3-D. Ces problèmes « d'assemblage » sont documentés par ailleurs et traités ensuite.

## 5.4. Energie de déformation

### 5.4.1. Energie et élasticité

L'énergie de déformation dans le cas de l'élasticité linéaire est analogue à celle d'un ressort. Dans le cas du ressort la force  $F$  est proportionnelle au déplacement relatif  $x$  des extrémités d'où  $F = k x$ ,  $k$  étant la constante de rigidité. L'énergie élastique (énergie libre) stockée dans le ressort

vaut donc  $W = \int F dx = \int k x dx = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} F x$ . En considérant que tous les efforts sont appliqués en même temps avec la même progression - étant donné que l'histoire du chargement n'influe pas sur l'état actuel dans le cas des H. P. P. en élasticité linéaire, il est loisible de choisir le cas le plus simple pour cette démonstration - l'énergie de déformation d'une structure peut donc se mettre sous la forme :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} d_1^k \\ d_2^k \\ d_3^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1^k \\ f_2^k \\ f_3^k \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^3 d_i^k f_i^k$$

Où  $d_1$  et  $d_2$  représentent des déplacements,  $d_3$  une rotation,  $f_1$  et  $f_2$  représentent des forces,  $f_3$  un couple.

Facteurs d'influence  $\alpha_{ij}^{kl}$  :

$$d_i^k = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij}^{kl} f_j^l$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij}^{kl} f_j^l f_i^k$$

théorème de Maxwell-Betti :  $\alpha_{ij}^{kl} = \alpha_{ji}^{kl}$

$$\partial W / \partial f_i^k = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij}^{kl} f_j^l = d_i^k$$

théorème de Castigliano :  $\partial W / \partial f_i^k = d_i^k$

*espace dessin et calculs, exemple simple sur une poutre isostatique*

#### 5.4.2. Energie de déformation liée à l'effort normal

$$V = 0, M = 0, \quad dW_{x_1 \rightarrow x_1 + dx_1} = N(x_1) du^*(x_1)$$

En élasticité  $du^*$  est proportionnel à  $N$ ,  $du^*(x_1) = \frac{N(x_1)}{EA} dx_1$  donc  $dW_{x_1 \rightarrow x_1 + dx_1} = \frac{1}{2} \frac{N^2(x_1)}{EA} dx_1$

*Par EA, il faut bien sûr entendre  $E(x_1) A(x_1)$*

$$\text{car } dW_{x_1 \rightarrow x_1 + dx_1} = \int_{t=0}^{t=t_a} \alpha(t) N(x_1) \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) dt}{EA} dx_1$$

$\alpha(t)$  définit une progression continue et dérivable quelconque de chargement dans le temps telle que  $\alpha(t_0) = 0$  et  $\alpha(t_a) = 1$ .

$$\text{et car } \int_{t=0}^{t=t_a} \alpha(t) \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) dt = \int_{t=0}^{t=t_a} \alpha(t) \alpha'(t) dt = \frac{1}{2} \alpha^2 \Big|_{t_0}^{t_a} = \frac{1}{2} [\alpha(t_a) - \alpha(t_0)] = \frac{1}{2}$$

*espace dessin et calculs, déformations et contraintes d'effort normal*

### 5.4.3. Energie de déformation liée à l'effort tranchant

$$N = 0, M = 0, \quad dW_{x_1 \rightarrow x_1 + dx_1} = V(x_1) dv^*(x_1)$$

En élasticité  $dv^*$  est proportionnel à  $V$ ,  $dv^*(x_1) = \frac{V(x_1)}{G S_r} dx_1$  donc  $dW_{x_1 \rightarrow x_1 + dx_1} = \frac{1}{2} \frac{V^2(x_1)}{G S_r} dx_1$

Par  $G S_r$ , il faut bien sûr entendre  $G(x_1) S_r(x_1)$

*espace dessin et calculs, déformations et contraintes d'effort tranchant*

### 5.4.4. Energie de déformation liée au moment fléchissant

$$N = 0, V = 0, \quad dW_{x_1 \rightarrow x_1 + dx_1} = \frac{1}{2} \frac{M^2}{E I_{G3}} dx_1$$

$$N = 0, V = 0, \quad dW_{x_1 \rightarrow x_1 + dx_1} = M(x_1) d\theta^*(x_1)$$

En élasticité  $d\theta^*$  est proportionnel à  $M$ ,  $d\theta^*(x_1) = \frac{M(x_1)}{E I_{GZ}} dx_1$  donc  $dW_{x_1 \rightarrow x_1 + dx_1} = \frac{1}{2} \frac{M^2(x_1)}{E I_{GZ}} dx_1$

Par  $E I_{GZ}$ , il faut bien sûr entendre  $E(x_1) I_{GZ}(x_1)$

*espace dessin et calculs, déformations et contraintes de flexion*

### 5.4.5. Energie de déformation élastique dans une poutre

$$dW_{x_1 \rightarrow x_1 + dx_1} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{N^2}{E A} + \frac{V^2}{\mu S_r} + \frac{M^2}{E I_{G3}} \right\} dx_1$$

$$W_{0 \rightarrow 1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \frac{[N(x_1)]^2}{E(x_1) A(x_1)} + \frac{[V(x_1)]^2}{\mu(x_1) S_r(x_1)} + \frac{[M(x_1)]^2}{E(x_1) I_{G3}(x_1)} \right\} dx_1$$

en général  $\frac{[V(x_1)]^2}{\mu(x_1) S_r(x_1)} \ll \frac{[M(x_1)]^2}{E(x_1) I_{G3}(x_1)}$  et  $\frac{[N(x_1)]^2}{E(x_1) A(x_1)} \ll \frac{[M(x_1)]^2}{E(x_1) I_{G3}(x_1)}$

$$W_{0 \rightarrow 1} \approx \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{[M(x_1)]^2}{E(x_1) I_{G3}(x_1)} dx_1 \text{ dans les structures fléchies}$$

$$W_{0 \rightarrow 1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{[N(x_1)]^2}{E(x_1) A(x_1)} dx_1 \text{ dans les structures triangulées-rotulées}$$

*espace dessin et calculs, pas de travail de  $N$  dans  $\gamma$  ni  $\theta$ , ...*

## 6. Résolution des problèmes de poutres droites -systèmes isostatiques plans

### 6.1. Equation de la déformée

Poutre sur deux appuis avec une force  $F$ .  $-x_2$  appliquée en son milieu,  $E I_{G3}$  est constant.

Conditions aux limites (conditions d'appuis) :  $y(0) = 0$  et  $y(l) = 0$

Pour  $x_1 \in [0, l/2]$  :  $E I_{G3} y_{AC}''(x_1) = F x_1 / 2$ , d'où :

$$E I_{G3} y_{AC}'(x_1) = F x_1^2 / 4 + a$$

$$\text{et } E I_{G3} y_{AC}(x_1) = F x_1^3 / 12 + a x_1 + b$$

Pour  $x_1 \in [l/2, l]$  :  $E I_{G3} y_{CB}''(x_1) = F (l - x_1) / 2$

$$E I_{G3} y_{CB}'(x_1) = -F (l - x_1)^2 / 4 + c$$

$$\text{et } E I_{G3} y_{CB}(x_1) = F (l - x_1)^3 / 12 - c (l - x_1) + d$$

Pour ce problème, il y a 4 constantes d'intégrations inconnues  $a, b, c, d$  à identifier. Conditions de raccordement :  $y_{AC}'(l/2) = y_{CB}'(l/2)$  et  $y_{AC}(l/2) = y_{CB}(l/2)$ . On en déduit :

$b = 0, d = 0, c = a + Fl^2/8$  puis  $a = -Fl^2/16$  donc  $c = Fl^2/16$ . Le résultat est donc :

Pour  $x_1 \in [0, l/2]$  :

$$y_{AC}'(x_1) = (F x_1^2 / 4 - Fl^2 / 16) / E I_{G3} \quad \text{et} \quad y_{AC}(x_1) = (F x_1^3 / 12 - Fl^2 x_1 / 16) / E I_{G3}$$

Pour  $x_1 \in [l/2, l]$  :

$$y_{CB}'(x_1) = (-F (l - x_1)^2 / 4 + Fl^2 / 16) / E I_{G3} \quad \text{et} \quad y_{CB}(x_1) = (F (l - x_1)^3 / 6 - Fl^2 (l - x_1) / 16) / E I_{G3}$$

La flèche maximale correspond à  $y'(x_1) = 0$  donc pour  $x_1 = l/2$  et vaut :

$$y_{\max} = y(l/2) = -Fl^3 / 48 E I_{G3}$$

*AN : bois résineux de classe C24, en flexion  $f_{\max} = 24 \text{ MPa}$ ,  $E = 11 \text{ GPa}$ .  $|y_{\max}| < l / 200$ .*

*Portée de 2.5 m. Section de chevron  $80 \times 60 \text{ mm}^2$ .  $I_{G3} = 0.06 \times 0.08^3 / 12 = 2.56 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$*

*Condition de résistance :*

*$F = 800 \text{ N}$ ,  $M_{\max} = 1250 \text{ N.m}$ ,  $\sigma_{\max} = 19.53 \text{ MPa}$ .*

$$\sigma_{\max} < f_{\max} \Leftrightarrow M_{\max} v / I_{G3} < f_{\max} \Leftrightarrow Fl v / 4 I_{G3} < f_{\max} \Leftrightarrow F < 4 I_{G3} f_{\max} / l v$$

$$F < 983 \text{ N}$$

*Condition de flèche :*

$$y_{max} = 9,25 \text{ mm}$$

$$|y_{max}| = Fl^3 / 48 E I_{G3} < l / 200 \Leftrightarrow F < 48 E I_{G3} / 200 l^2$$

$$F < 1081 \text{ N}$$

$S^V$  Venant ? - Charge  $F = 800 \text{ N}$  appliquée sur  $60 \times 60 \text{ mm}^2$ .

$$\sigma_{22} \approx 800 / 36 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 0.22 \text{ MPa} \ll \sigma_{max}$$

déformation liée à  $V$  :  $u_2 \approx \gamma l/2 \Leftrightarrow u_2 \approx \bar{V} \mu S_r l/2$  où  $V = -F/2$  et  $S_r = 5A/6$ . Considérons  $\mu$  de l'ordre  $1 \text{ GPa}$ , on obtient  $u_2 \approx 1.25 \cdot 10^{-4}$  et on remarque que  $u_2 \ll y(l/2)$

*espace dessin et calculs, déformations en parallélogramme de  $V$  négligeables, contrainte  $\sigma_{22}$  sous la charge qui tend vers 0 quand on s'éloigne de  $F$*

## 6.2. Déplacement ou rotation en un point

Si l'on a besoin que d'une valeur en un point et non de l'équation complète de la déformée, on peut se tourner vers les méthodes "énergétiques" pour résoudre efficacement le problème. Le théorème de Castigliano peut être utilisé. Toutefois, le T. T. V. permettra de résoudre plus de problèmes sans que les calculs ne soient plus fastidieux. Lorsqu'on cherche un déplacement  $d$  (ou une rotation) en un point  $P$ , il suffit d'appliquer une force virtuelle  $F^*$  (ou un couple) au point  $P$  et de faire travailler les efforts virtuels dans les déformations réelles. Le travail des efforts extérieurs doit être égal au travail des efforts intérieurs. En pratique, on applique l'effort virtuel sur la même structure mais pas forcément avec les mêmes liaisons, l'essentiel étant que seule la force (ou le couple) travaille du côté "extérieur" et que le calcul soit le plus simple possible. Pour obtenir le déplacement  $d$  dans la direction de  $F^*$ , on écrira donc :

$$F^* d_{\text{cherché}} = \int_{\text{Structure}} \left\{ \frac{N^*(x_1) N(x_1)}{E(x_1) A(x_1)} + \frac{V^*(x_1) T(x_1)}{\mu(x_1) S_r(x_1)} + \frac{M^*(x_1) M(x_1)}{E(x_1) I_{G3}(x_1)} \right\} dx_1$$

*espace dessin et calculs, exemple simple de la poutre isostatique traitée ci-avant*



### 6.3. Théorème de Verechaguine, intégrales de Mohr

Dans la plupart des cas l'effort virtuel varie linéairement et EI ne varie pas sur le domaine d'intégration. On peut alors facilement montrer que :

$$\int_0^L \left\{ \frac{M(x_1)M^*(x_1)}{EI} \right\} dx_1 = \frac{\Omega(M) M^*(x_{1G})}{EI}$$

où  $\Omega(M)$  est la surface de  $M(x_1)$  et  $x_{1G}$  le centre de gravité de  $\Omega(M)$ .

En effet, comme  $M^*(x_1)$  varie linéairement, on peut le mettre sous la forme  $a x_1 + b$ . Il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^L \left\{ \frac{M(x_1)M^*(x_1)}{EI} \right\} dx_1 &= \frac{1}{EI} \int_0^L (a x_1 + b) M(x_1) dx_1 = \frac{1}{EI} \left\{ a \int_0^L x_1 M(x_1) dx_1 + b \int_0^L M(x_1) dx_1 \right\} \\ &= \frac{1}{EI} \{ a x_{1G} \Omega(M) + b \Omega(M) \} \text{ puisque } x_{1G} \equiv \frac{\int_0^L x_1 M(x_1) dx_1}{\int_0^L M(x_1) dx_1} \text{ où } \Omega(M) = \int_0^L M(x_1) dx_1 \end{aligned}$$

## 7. Résolution des problèmes de poutres droites - systèmes hyperstatiques plans

### 7.1. Degré d'hyperstaticité

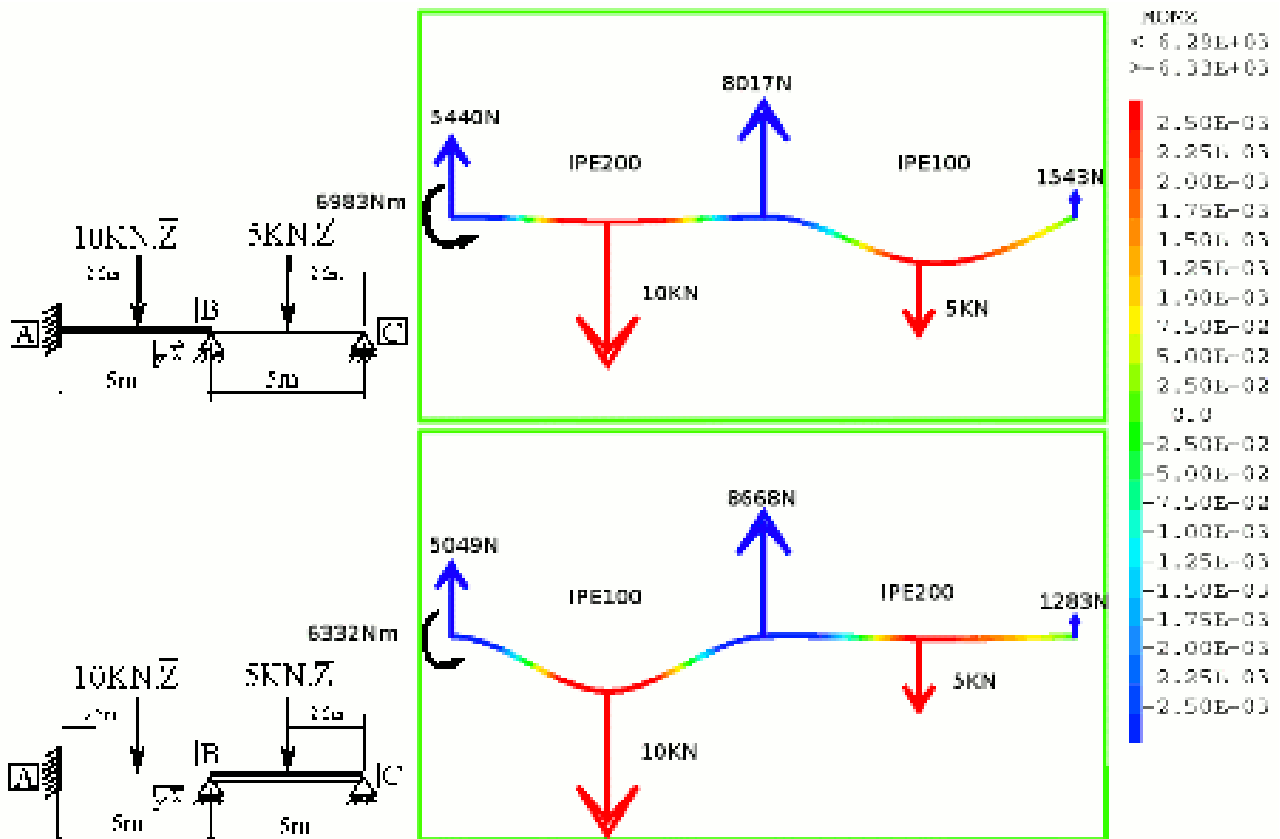


Illustration de l'effet de la répartition des rigidités dans une structure hyperstatique sur les réactions d'appui.

Une structure en équilibre est dite isostatique si les équations d'équilibre suffisent pour **tout** déterminer. Si elles ne suffisent pas, elle est dite hyperstatique.

*Si une structure ne peut être équilibrée – pas assez de liaisons compte tenu des degrés de liberté - alors il s'agit d'un système hypostatique ou mécanisme.*

*Le degré d'hyperstaticité est indépendant du chargement.*

*Lors de la conception d'une structure, le choix du degré d'hyperstaticité – des liaisons ou des degrés de liberté – dépend des considérations de sécurité, de pérennité (tassements ou dilatations différentiels...) et bien sûr économiques.*

Pour calculer le degré d'hyperstaticité, il suffit de faire le bilan du nombre d'équations et du nombre d'inconnues après avoir fait l'équilibre des nœuds puis des poutres. Dans le plan, il y a 3 équations d'équilibre par nœud ainsi que par poutre. Chaque extrémité de poutre connectée à un nœud possède a priori 3 inconnues (N,V,M). Il faut ajouter les liaisons avec l'extérieur, i. e. réactions d'appui. Les charges appliquées sont des données. Le degré d'hyperstaticité  $D^\circ$  peut donc être calculé à l'aide de :

$$D^\circ = \sum_{i=1}^{n \text{ nœuds}} l_i - 3 n_b$$

où  $l_i$  est le résultat du bilan inconnues – équations au nœud  $i$  et  $n_b$  le nombre de barres. En toute rigueur, il faut faire le calcul sur toutes les sous structures possibles pour être certain que la structure ne présente pas la somme d'un mécanisme local et d'une sous structure hyperstatique.

*dessins et calculs, équilibre des nœuds*

## **7.2. Résolution par la méthode des forces**

1 - On rend la structure isostatique en supprimant des liaisons, on obtient une structure isostatique associée.

2 - Le système de base est la structure isostatique associée sollicitée par les efforts donnés.

3 - Les systèmes suivants sont obtenus avec la structure isostatique associée sollicitée par un des efforts correspondant à une liaison supprimée. On procède pour tous les efforts de liaison supprimés.

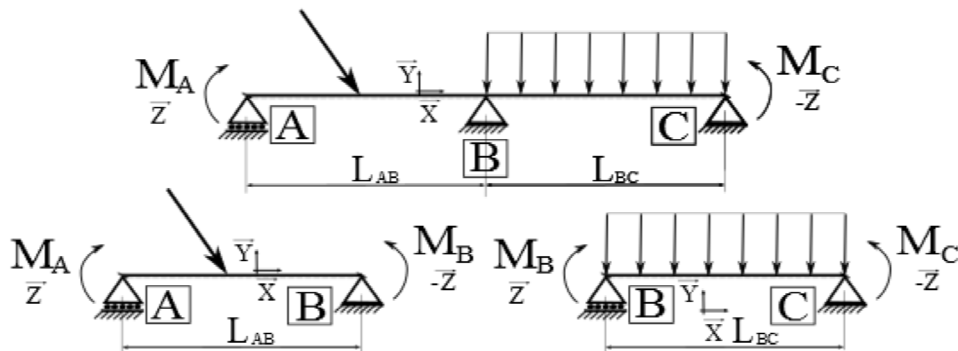
4 - On écrit que la superposition de tous ces systèmes avec le système de base reconstitue le système de départ du point de vue des conditions de liaison.

espace dessin et calculs, exemples simples d'une poutre continue sur 3 appuis puis 4 appuis

NB. Le théorème de Ménabréa, conséquence directe du théorème de Castigliano, peut aussi être utilisé. Celui-ci ne fait apparaître indirectement la superposition mais la superposition reste néanmoins à la base de la résolution.

### 7.3. Formule des trois moments, démonstration à partir de la méthode des forces

On considère une poutre droite continue sur 3 appuis telle que le produit du module d'Young  $E$  et du moment quadratique  $I_{G3}$  soit constant, i. e. «  $EI = \text{constante}$  ». Les deux travées peuvent être de longueurs différentes. Le chargement des travées est quelconque. Il s'agit de déterminer le moment fléchissant  $M_B$  sur l'appui central. Le système est hyperstatique de degré 1. On choisit d'utiliser la méthode des forces et le T. T. V. pour résoudre.



Poutre continue sur appuis.

On considère la poutre AB de gauche de longueur  $L_{AB}$ . La rotation en B dans ce système isostatique associé au système original résulte de la superposition de l'action du chargement entre appuis, de l'action de  $M_A$  et de l'action de  $M_B$ . On calcule tout d'abord la rotation en B,  $\theta^{g \text{ iso}}$ , sous l'action du chargement extérieur. En négligeant les déformations d'effort tranchant et d'effort normal devant celles du moments fléchissant, le T. T. V. permet d'écrire :

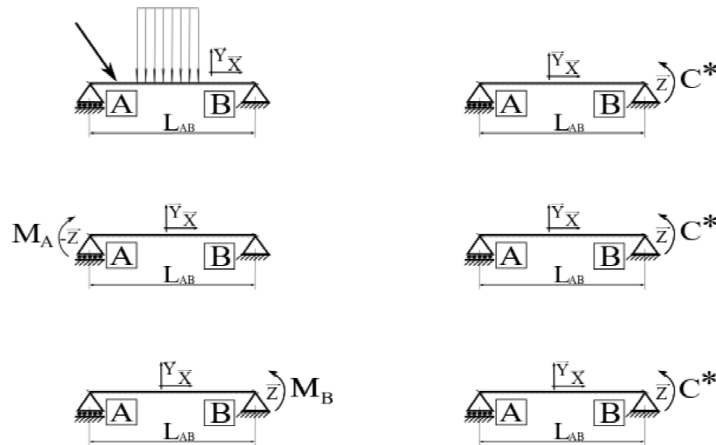
$$C^* \theta^{g \text{ iso}} = \int_0^{L_{AB}} \left\{ \frac{M(x_1)M^*(x_1)}{E I_{G3}} \right\} dx_1$$

où  $M(x_1)$  est associé au chargement entre les appuis et  $M^*(x_1)$  au couple virtuel  $C^*$  appliqué en B. On calcule ensuite la rotation en B,  $\theta^{g \text{ MA}}$ , liée à l'action de  $M_A$  :

$$C^* \theta^{g \text{ MA}} = \frac{1}{3} C^* \frac{1}{2} \frac{M_A}{E I_{G3}} L_{AB}$$

Puis la rotation en B,  $\theta^{g \text{ MB}}$ , liée à l'action de  $M_B$  :

$$C^* \theta^{g \text{ MB}} = \frac{2}{3} C^* \frac{1}{2} \frac{M_B}{E I_{G3}} L_{AB}$$



*Poutre continue sur appuis, superposition et couple virtuel.*

On procède de façon analogue pour la poutre BC et il vient :

$$C^* \theta^{d \text{ iso}} = \int_0^{L_{BC}} \left\{ \frac{M(x_1) M^*(x_1)}{E I_{G3}} \right\} dx_1$$

$$C^* \theta^{d \text{ MC}} = \frac{1}{3} C^* \frac{1}{2} \frac{M_C}{E I_{G3}} L_{BC}$$

$$C^* \theta^{d \text{ MB}} = \frac{2}{3} C^* \frac{1}{2} \frac{M_B}{E I_{G3}} L_{BC}$$

Il s'agit de reconstituer la structure de départ, pour cela il faut écrire la continuité en rotation de la poutre au passage de l'appui B. Cela se traduit par :

$$\theta^{g \text{ iso}} + \theta^{g \text{ MA}} + \theta^{g \text{ MB}} = \theta^{d \text{ iso}} + \theta^{d \text{ MC}} + \theta^{d \text{ MB}}$$

En remplaçant par les expressions obtenues précédemment, on obtient finalement la **formule des trois moments ou formule de Clapeyron** :

$$L_{AB} M_A + 2 (L_{AB} + L_{BC}) M_B + L_{BC} M_C = 6EI (\theta^{d \text{ iso}} - \theta^{g \text{ iso}})$$

Bien sûr, il faut connaître  $(\theta^{d \text{ iso}} - \theta^{g \text{ iso}})$  pour résoudre le problème. Dans le cas d'une charge uniformément répartie  $q$  portée par  $Z$ , on sait que  $\theta^{d \text{ iso}} = -qL_{BC}^3/24EI$  et  $\theta^{g \text{ iso}} = +qL_{AB}^3/24EI$ . On trouvera plus loin un exemple de mise en œuvre de la méthode.

## 8. Méthode des déplacements

### 8.1. Introduction

La méthode des déplacements est basée sur la solution analytique obtenue pour une poutre dont les extrémités sont soumises à des déplacements et rotations données<sup>8</sup>. Elle constitue une méthode systématique de résolution qui se prête bien à la programmation informatique. Malheureusement, sans outil informatique, elle conduit souvent à des calculs fastidieux. Nonobstant, elle présente un grand intérêt pour l'apprentissage et peut constituer une introduction à la méthode des éléments finis.

Sans rien perdre conceptuellement, nous nous limiterons à des structures planes dans un plan (X, Y). Les déplacements seront notés  $U_i$  selon X,  $V_i$  selon Y et la rotation dans ce plan  $\theta_i$  selon Z. L'indice  $i$  désigne le nœud numéro  $i$ . ( $U_i, V_i, \theta_i$ ) sont appelés les degrés de liberté du

<sup>8</sup> Elle est aussi appelée méthode des relaxations car on peut considérer que les poutres sont chargées pendant que les nœuds sont bloqués en déplacements et rotation puis débloqués pour minimiser l'énergie potentielle de la structure et ainsi satisfaire aux conditions d'équilibre.

nœud<sup>9</sup>. Il n'y a donc pas de torsion autour de l'axe x de la génératrice dans les poutres. Nous noterons en minuscules ( $u_i, v_i$ ) les déplacements exprimés dans le repère local ( $x, y$ ) de la poutre et en majuscules ceux exprimés dans le repère global ( $X, Y$ ), généralement celui de la structure. Deux choix sont possibles pour les efforts aux extrémités des poutres, soit on considère les efforts intérieurs ( $N, V, M$ ) – ce sera le cas ici –, soit on considère les forces et couples appliqués.

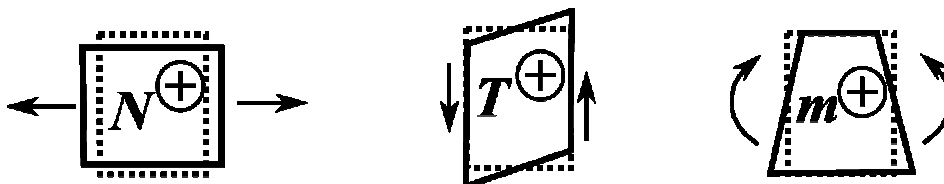


Les données du problème sont :

- les nœuds définis par leurs coordonnées spatiales et les types de liaisons (rotule en extrémité de poutre, encastrement sur appui...),
- les poutres chacune définie par deux nœuds et ses caractéristiques géométriques et matériau,
- les conditions aux limites définies par les charges imposées et les déplacements imposés.

En utilisant la solution de l'équilibre et la déformée de la poutre calculée une fois pour toutes dans ce cours, le principe de résolution est :

- on procède à l'écriture des équations d'équilibre de tous les nœuds de la structure,
- on met en forme le système linéaire d'équation, les efforts donnés sont remplacés par leur valeur (0 par exemple pour une extrémité libre non chargée) et les efforts inconnus sont exprimés à partir des déplacements et rotations,
- on résout le système linéaire d'équations,
- on trace les diagrammes, on calcule éventuellement des déplacements entre des nœuds.



*Rappel des conventions de signes pour les efforts intérieurs, traction, cisaillement et flexion.*

## 8.2. Solution de base

### 8.2.1. Composante liée à l'effort normal

Il s'agit de calculer une fois pour toutes la solution d'un problème de poutre chargée sans connaître a priori les conditions aux limites aux extrémités. En pratique, on se donne un déplacement  $u_i$  selon  $x$  et un effort normal  $N_{ij}$  – pour l'instant inconnu - à l'extrémité de la poutre du côté du nœud  $i$  et on intègre les efforts et les déplacements jusqu'à l'autre extrémité  $j$ . Il faut bien sûr respecter l'équilibre en tout point et le comportement du matériau. Les sections droites restent droites puisque l'on utilise la théorie des poutres. On obtient ainsi le déplacement  $u_j$  et l'effort normal  $N_{ji}$  à l'autre extrémité aux constantes de départ  $u_i$  et  $N_{ij}$  près, c'est à dire que l'on obtient le déplacement relatif et l'effort normal relatif.

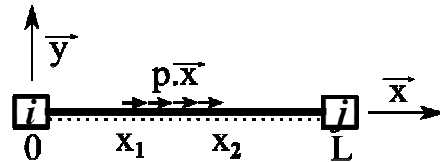
Un chargement astucieux qui permet de couvrir une large gamme de types de chargement consiste à ne charger uniformément qu'entre l'abscisse  $x_1$  et l'abscisse  $x_2$ . Donc :

<sup>9</sup> Dans le plan, il y a 3 degrés de liberté par nœud. Dans l'espace, il y a 6 degrés de liberté par nœud, 3 déplacements et trois rotations.

$$N(x) = N_{ij} - \int_0^x P(s) ds \quad \text{et} \quad P(s) = p \text{ si } s \in [x_1, x_2], P(s) = 0 \text{ si } s \notin [x_1, x_2]$$

où est orienté selon  $x$ . L'effort normal dans la poutre de longueur  $L$  prend donc les valeurs suivantes :

$0 \leq x \leq x_1$	$x_1 \leq x \leq x_2$	$x_2 \leq L$
$N(x) = N_{ij}$	$N(x) = N_{ij} - p(x - x_1)$	$N(x) = N_{ij} - p(x_2 - x_1) = N_{ji}$



Chargement normal entre les nœuds  $i$  et  $j$ .

La poutre se déforme en allongement et/ou raccourcissement selon :

$$u(x) = u_i + \int_0^x \frac{N(s)}{E(s)A(s)} ds = u_i + \int_0^x \frac{N(s)}{EA} ds$$

car on considère le cas où  $E(s)A(s)$  est constant le long de la poutre<sup>10</sup>.

$0 \leq x \leq x_1$	$x_1 \leq x \leq x_2$	$x_2 \leq L$
$u(x) = u_i + \frac{N_{ij}}{EA} x$	$u(x) = u_i + \int_0^x \frac{N_{ij} - P(s)}{EA} ds$ $= u_i + \frac{N_{ij}}{EA} x - \frac{p(x - x_1)^2}{2EA}$	$u(x) = u_i + \frac{N_{ij}}{EA} x - \frac{p(x_2 - x_1)^2}{2EA}$ $- \frac{p(x_2 - x_1)(x - x_1)}{EA}$

On peut maintenant calculer le déplacement du nœud  $j$  :

$$u_j = u(L) = u_i + \frac{N_{ij}}{EA} L - \frac{p(x_2 - x_1)^2}{2EA} - \frac{p(x_2 - x_1)(L - x_1)}{EA} = u_i + \frac{N_{ij}}{EA} L - \frac{p(2L - x_2 - x_1)(x_2 - x_1)}{2EA}$$

On rappelle que  $N_{ij}$  est indépendant de  $v_i$ ,  $v_j$ ,  $\theta_i$  et  $\theta_j$ . Exprimons maintenant  $N_{ij}$  en fonction de  $u_i$  et  $u_j$  :

$$N_{ij} = (u_j - u_i) \frac{EA}{L} + \frac{p(2L - x_2 - x_1)(x_2 - x_1)}{2L}$$

$$\text{Et notons } N_{ij}^0 = \frac{p(2L - x_2 - x_1)(x_2 - x_1)}{2L} \quad \text{puis} \quad N_{ji}^0 = \frac{-p(x_2^2 - x_1^2)}{2L}$$

$$\text{car } N_{ji} = N_{ij} - p(x_2 - x_1) = (u_j - u_i) \frac{EA}{L} - \frac{p(x_2^2 - x_1^2)}{2L}$$

<sup>10</sup> Si cela n'est pas le cas, on pourra obtenir une approximation en procédant à une sous-structuration en créant des nœuds intermédiaires entre  $i$  et  $j$  puis en considérant que  $EA$  est constant par morceau.

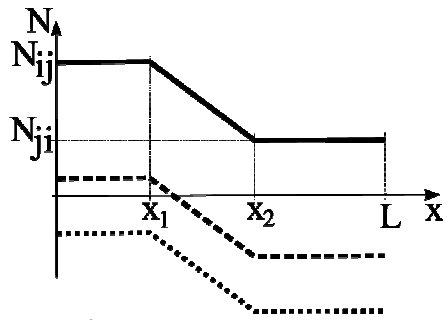


Diagramme d'effort normal pour un chargement entre  $x_1$  et  $x_2$ . Trois possibilités sont représentées chacune pour une valeur possible de  $N_{ij}$ .

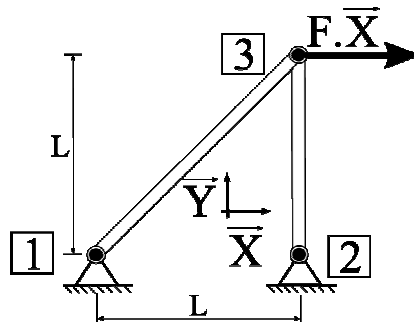
On peut mettre ces équations sous forme matricielle : 
$$\begin{bmatrix} N_{ij} \\ N_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EA/L & EA/L \\ -EA/L & EA/L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{ij}^0 \\ N_{ji}^0 \end{bmatrix}$$

Enfin notons que  $N_{ij} - N_{ji} = p(x_2 - x_1) = N_{ij}^0 - N_{ji}^0$  ce qui traduit que la différence d'effort normal entre les extrémités est due au chargement extérieur et que celui-ci est reporté aux nœuds à l'aide des termes  $N_{ij}^0$  et  $N_{ji}^0$ .

Pour les systèmes dits triangulés, i. e. constitué de barres rotulées aux deux extrémités ou assimilées comme telles, ces dernières équations suffisent pour résoudre le problème.

### 8.2.2. Exemple pour un système triangulé

Considérons deux barres assemblées par des rotules constituant la structure de la figure suivante. On considérera que le produit de l'aire par le module d'élasticité, i. e.  $EA$ , est constant et le même pour les deux barres.



Structure triangulée à deux barres.

Pour cette structure isostatique, les trois équations d'équilibre peuvent suffire pour tout déterminer. Rappelons que l'équilibre d'une barre – droite ou non - avec une rotule à chacune de ses extrémités impose que la force transmise soit colinéaire à la direction définie par les deux rotules. Nommons  $F_{1X}$  et  $F_{1Y}$  les composantes de réactions d'appui selon  $X$  et  $Y$  au nœud 1 et de façon analogue  $F_{2X}$  et  $F_{2Y}$  pour le nœud 2. L'équilibre statique impose  $F_{1X} + F_{2X} + F = 0$  et  $F_{1Y} + F_{2Y} = 0$  et  $-F L + F_{2Y} L = 0$  d'où  $F_{2Y} = F$  et  $F_{1Y} = -F$  et  $F_{2X} = 0$  et  $F_{1X} = -F$ . Il est aisé d'en déduire ensuite les efforts dans les barres puis les déformations des barres.

Vérifions ceci par la méthode des déplacements. Les conditions aux limites imposent que seul le déplacement du nœud 3 est non nul. Les 6 inconnues du problème sont  $F_{1X}$ ,  $F_{1Y}$ ,  $F_{2X}$ ,  $F_{2Y}$ ,  $U_3$  et  $V_3$ . Ecrivons les 6 équations d'équilibre des actions sur les nœuds :

$$\text{Nœud 1 : } F_{1X} + \frac{1}{\sqrt{2}}N_{13} = 0 \quad \text{et} \quad F_{1Y} + \frac{1}{\sqrt{2}}N_{13} = 0$$

$$\text{Nœud 2 : } F_{2X} = 0 \quad \text{et} \quad F_{2Y} + N_{23} = 0$$

$$\text{Nœud 3 : } F - \frac{1}{\sqrt{2}}N_{31} = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}N_{31} - N_{32} = 0$$

Il est commode d'utiliser les expressions suivantes pour les changements de repère. On rappelle les caractères gras désignent des vecteurs.

$$\begin{aligned} \ell &= \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \\ \mathbf{x} &= \frac{X_j - X_i}{\ell} \mathbf{X} + \frac{Y_j - Y_i}{\ell} \mathbf{Y} & \mathbf{y} &= -\frac{Y_j - Y_i}{\ell} \mathbf{X} + \frac{X_j - X_i}{\ell} \mathbf{Y} \\ \mathbf{X} &= \frac{X_j - X_i}{\ell} \mathbf{x} - \frac{Y_j - Y_i}{\ell} \mathbf{y} & \mathbf{Y} &= \frac{Y_j - Y_i}{\ell} \mathbf{x} + \frac{X_j - X_i}{\ell} \mathbf{y} \end{aligned}$$

Il faut maintenant faire apparaître les déplacements. Les déplacements dans le repère local de la barre 1-3 s'expriment à l'aide de leurs correspondants dans le repère global :  $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}U_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}V_3$  et

$v_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}U_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}V_3$ . Etant donné que  $U_1 = 0$ ,  $V_1 = 0$ ,  $U_2 = 0$  et  $V_2 = 0$ , il vient :

$$\text{Nœud 1 : } F_{1X} + \frac{EA}{2\sqrt{2}L}(U_3 + V_3) = 0 \quad \text{et} \quad F_{1Y} + \frac{EA}{2\sqrt{2}L}(U_3 + V_3) = 0$$

$$\text{Nœud 2 : } F_{2X} = 0 \quad \text{et} \quad F_{2Y} + \frac{EA}{L}V_3 = 0$$

$$\text{Nœud 3 : } F - \frac{EA}{2\sqrt{2}L}(U_3 + V_3) = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{EA}{L}V_3 - \frac{EA}{2\sqrt{2}L}(U_3 + V_3) = 0$$

Il suffit maintenant de résoudre ce système de 6 équations à 6 inconnues. On trouve finalement  $V_3 = -\frac{FL}{EA}$ ,  $U_3 = \frac{FL}{EA}(1 + 2\sqrt{2})$ ,  $F_{1X} = -F$ ,  $F_{1Y} = -F$ ,  $F_{2X} = 0$  et  $F_{2Y} = F$ .

### 8.2.3. Composantes liées à la flexion

Si l'on considère les déplacements selon l'axe  $y$   $v_i$  et  $v_j$  ainsi que les rotations  $\theta_i$  et  $\theta_j$ , il apparaît que tous déplacements relatifs des nœuds ( $v_i - v_j \neq 0$  et  $\theta_i \neq \theta_j$ , par exemple) induit de la flexion dans la poutre. On ne peut donc pas dissocier ces quatre degrés de liberté du point de vue des équations de flexion. Pour plus de simplicité, nous négligerons les déformations d'effort tranchant devant celles du moment fléchissant, i. e.  $V/GS_r \ll M/EI$ . Comme précédemment, nous considérons une charge  $q$  orientée selon  $y$  et uniformément répartie entre l'abscisse  $x_1$  et l'abscisse  $x_2$ , i. e.  $Q(s) = q$  si  $s \in [x_1, x_2]$  et  $Q(s) = 0$  si  $s \notin [x_1, x_2]$ . L'équilibre global de la poutre est traduit par :

$$V_{ji} - V_{ij} + \int_0^L Q(s) ds = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V_{ji} - V_{ij} + q \int_{x_1}^{x_2} ds = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V_{ji} - V_{ij} = q(x_2 - x_1)$$

$$M_{ji} - M_{ij} + \int_0^L s q(s) ds + V_{ji} L = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M_{ji} - M_{ij} + q \int_{x_1}^{x_2} s ds + V_{ji} L = 0$$

$$\Leftrightarrow M_{ji} - M_{ij} = q(x_2 - x_1)(x_1 + x_2)/2 - V_{ji} L$$

respectivement pour les forces projetées sur  $y$  et pour les moments selon  $Z$  calculés ici par rapport au nœud  $i$ . L'effort tranchant varie donc selon :

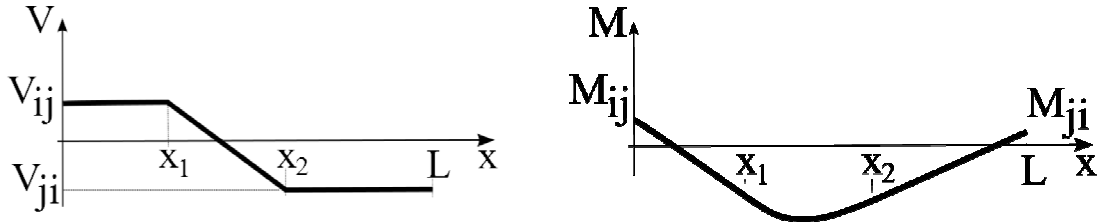
$0 \leq x \leq x_1$	$x_1 \leq x \leq x_2$	$x_2 \leq L$
---------------------	-----------------------	--------------



$V(x) = V_{ij}$	$V(x) = V_{ij} - q(x - x_1)$	$V(x) = V_{ij} - q(x_2 - x_1) = V_{ji}$
-----------------	------------------------------	---

Et le moment fléchissant selon :

$0 \leq x \leq x_1$	$x_1 \leq x \leq x_2$	$x_2 \leq L$
$M(x) = M_{ij} - V_{ij} x$	$M(x) = M_{ij} - V_{ij} x + \int_0^x (x-s) Q(s) ds$ $= M_{ij} - V_{ij} x + q \int_{x_1}^x (x-s) ds$ $= M_{ij} - V_{ij} x + q(x - x_1)^2 / 2$	$M(x) = M_{ij} - V_{ij} x + q \int_{x_1}^{x_2} (x-s) ds$ $= M_{ij} - V_{ij} x + q [(x - x_1)^2 - (x - x_2)^2] / 2$



Diagrammes d'effort tranchant (g) et de moment fléchissant (d) pour un chargement entre  $x_1$  et  $x_2$ ,  $V_{ij}$  et  $M_{ij}$  étant donnés.

On peut maintenant calculer la déformée en intégrant les rotations depuis le nœud i. On fait le calcul pour le cas où EI est constant entre les nœuds i et j.

$0 \leq x \leq x_1$	$x_1 \leq x \leq x_2$	$x_2 \leq L$
$EI y_1''(x) = M_{ij} - V_{ij} x$	$EI y_2''(x) = M_{ij} - V_{ij} x + q(x - x_1)^2 / 2$	$EI y_3''(x) = M_{ij} - V_{ij} x + q[(x - x_1)^2 - (x - x_2)^2] / 2$
$EI y_1'(x) = M_{ij} x - V_{ij} x^2 / 2 + C_1$	$EI y_2'(x) = M_{ij} x - V_{ij} x^2 / 2 + C_3 + q(x - x_1)^3 / 6$	$EI y_3'(x) = M_{ij} x - V_{ij} x^2 / 2 + C_5 + q[(x - x_1)^3 - (x - x_2)^3] / 6$
$EI y_1(x) = M_{ij} x^2 / 2 - V_{ij} x^3 / 6 + C_1 x + C_2$	$EI y_2(x) = M_{ij} x^2 / 2 - V_{ij} x^3 / 6 + C_3 x + C_4 + q(x - x_1)^4 / 24$	$EI y_3(x) = M_{ij} x^2 / 2 - V_{ij} x^3 / 6 + C_5 x + C_6 + q[(x - x_1)^4 - (x - x_2)^4] / 24$

Les conditions de raccordement – continuité des déplacements et rotations - des tronçons 1, 2 et 3 se formalisent par  $y_1'(x_1) = y_2'(x_1)$ ,  $y_2'(x_2) = y_3'(x_2)$ ,  $y_1(x_1) = y_2(x_1)$ ,  $y_2(x_2) = y_3(x_2)$ . Ceci conduit à  $C_1 = C_3 = C_5$  et  $C_2 = C_4 = C_6$ . Remarquons que  $EI y_1'(0) = C_1$  donc  $C_1/EI = \theta_i$ . De même  $EI y_1(0) = C_2$  donc  $C_2/EI = v_i$ . Faisons maintenant apparaître les rotations et déplacements différentiels :

$$\theta_j - \theta_i = y_3'(L) - y_1'(0) = \frac{1}{EI} \left\{ M_{ij} L - V_{ij} \frac{L^2}{2} + \frac{q}{6} [(L - x_1)^3 - (L - x_2)^3] \right\}$$

$$v_j - v_i = y_3(L) - y_1(0) = \frac{1}{EI} \left\{ M_{ij} \frac{L^2}{2} - V_{ij} \frac{L^3}{6} + \frac{q}{24} [(L - x_1)^4 - (L - x_2)^4] \right\} + \theta_i L$$

où le terme  $\theta_i$  joue le rôle d'une rotation solide dans cette dernière équation. En effet, dans le cas d'une rotation solide, i. e.  $\theta_j = \theta_i$  et  $M(x) = 0$ ,  $V(x) = 0$  et  $q(x) = 0$ , la différence de déplacement des nœuds i et j vaut  $v_j - v_i = \tan(\theta_i) L$ . Or  $\tan(\theta_i) \approx \theta_i$  puisque dans les hypothèses des petites perturbations  $\theta_i \ll 1$ , d'où  $v_j - v_i = \theta_i L$ . Il faut ensuite éliminer le terme  $V_{ij}$  dans les équations précédentes pour pouvoir exprimer  $M_{ij}$  à l'aide des degrés de liberté en flexion  $\theta_i$ ,  $\theta_j, v_i$  et  $v_j$ . Il vient :

$$EI \left\{ (v_j - v_i) - \frac{L}{3}(\theta_j - \theta_i) \right\} = M_{ij} \frac{L^2}{6} + \frac{q}{24} [(L - x_1)^4 - (L - x_2)^4] - \frac{qL}{18} [(L - x_1)^3 - (L - x_2)^3] + \theta_i L$$

$$\text{puis } M_{ij} = \frac{-6 EI}{L^2} v_i + \frac{6 EI}{L^2} v_j - \frac{4 EI}{L} \theta_i - \frac{2 EI}{L} \theta_j + M_{ij}^0$$

$$\text{où } M_{ij}^0 = \frac{q}{12 L^2} [(L + 3x_1)(L - x_1)^3 - (L + 3x_2)(L - x_2)^3]$$

En éliminant de même  $M_{ij}$ , il vient :

$$V_{ij} = \frac{-12 EI}{L^3} v_i + \frac{12 EI}{L^3} v_j - \frac{6 EI}{L^2} \theta_i - \frac{6 EI}{L^2} \theta_j + V_{ij}^0$$

$$\text{où } V_{ij}^0 = \frac{q}{2 L^3} [(L + x_1)(L - x_1)^3 - (L + x_2)(L - x_2)^3]$$

En utilisant les deux équations d'équilibre global de la poutre établie en début de chapitre on trouve en complément :

$$M_{ji} = \frac{6 EI}{L^2} v_i - \frac{6 EI}{L^2} v_j + \frac{2 EI}{L} \theta_i + \frac{4 EI}{L} \theta_j + M_{ji}^0$$

$$\text{où } M_{ji}^0 = \frac{q}{12 L^2} [(4L - 3x_2) x_2^3 - (4L - 3x_1) x_1^3]$$

$$V_{ji} = \frac{-12 EI}{L^3} v_i + \frac{12 EI}{L^3} v_j - \frac{6 EI}{L^2} \theta_i - \frac{6 EI}{L^2} \theta_j + V_{ji}^0$$

$$\text{où } V_{ji}^0 = \frac{q}{2 L^3} [(2L - x_1) x_1^3 - (2L - x_2) x_2^3].$$

On peut mettre sous forme matricielle ces équations pour obtenir :

$$\begin{bmatrix} V_{ij} \\ M_{ij} \\ V_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -4EI/L & 6EI/L^2 & -2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{ij}^0 \\ M_{ij}^0 \\ V_{ji}^0 \\ M_{ji}^0 \end{bmatrix}$$

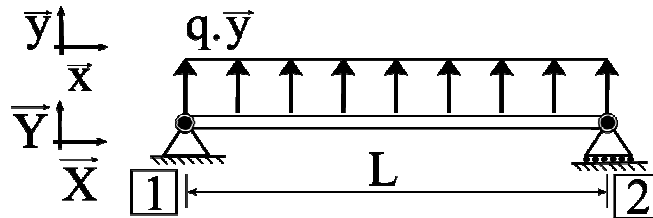
### 8.2.4. Matrice de rigidité d'une poutre

Les signes des termes de la matrice de rigidité suivante peuvent bien sûr changer selon la convention de signes adoptée pour les efforts intérieurs mais aussi avec le choix de travailler avec les efforts intérieurs aux extrémités de la poutre ou les forces et couples appliqués aux extrémités de la poutre ou encore aux nœuds. Avec nos choix et conventions, on obtient :

$$\begin{bmatrix} N_{ij} \\ V_{ij} \\ M_{ij} \\ N_{ji} \\ V_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EA/L & 0 & 0 & +EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & +12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & -6EI/L^2 & -4EI/L & 0 & +6EI/L^2 & -2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & +EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & +12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & +6EI/L^2 & +2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & +4EI/L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{ij}^0 \\ V_{ij}^0 \\ M_{ij}^0 \\ N_{ji}^0 \\ V_{ji}^0 \\ M_{ji}^0 \end{bmatrix}$$

### 8.2.5. Exemple pour un système fléchi

Considérons une poutre fléchie par exemple sous l'action du vent en toiture représentée sur la figure suivante. On considérera que le produit du moment quadratique par le module d'élasticité, i. e.  $EI$ , est constant le long de la poutre. Il s'agit d'un cas où il n'y aura pas de changement de repère à faire.



Poutre fléchie par exemple sous l'action du vent en toiture.

Les conditions aux limites sont telles que  $U_1 = 0$ ,  $V_1 = 0$ ,  $V_2 = 0$ ,  $M_1 = 0$  et  $M_2 = 0$ . Les inconnues non triviales de ce problème sont les réactions d'appui,  $F_{1X}$ ,  $F_{1Y}$ ,  $F_{2Y}$ , le déplacement  $U_2$  et les rotations  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Il faut d'abord calculer les charges reportées sur les nœuds comme si ceux-ci étaient bloqués en déplacement et rotation. Cela donne :  $N_{12}^0 = 0$ ,  $N_{21}^0 = 0$ ,  $V_{12}^0 = qL/2$ ,  $V_{21}^0 = -qL/2$ ,  $M_{12}^0 = qL^2/12$ , et  $M_{21}^0 = qL^2/12$ . L'équilibre des nœuds impose que :

$$\text{Nœud 1 : } F_{1X} + N_{12} = 0, \quad F_{1Y} + V_{12} = 0 \text{ et } M_{12} = 0$$

$$\text{Nœud 2 : } N_{21} = 0, \quad F_{2Y} - V_{21} = 0 \text{ et } M_{21} = 0$$

Faisons apparaître les déplacements :

$$\text{Nœud 1 : } F_{1X} + \frac{EA}{L} U_2 = 0$$

$$F_{1Y} - \frac{6EI}{L^2} \theta_1 - \frac{6EI}{L^2} \theta_2 + qL/2 = 0$$

$$-\frac{4EI}{L} \theta_1 - \frac{2EI}{L} \theta_2 + qL^2/12 = 0$$

$$\text{Nœud 2 : } \frac{EA}{L} U_2 = 0$$

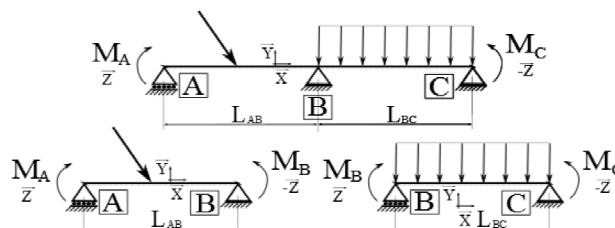
$$F_{2Y} + \frac{6EI}{L^2} \theta_1 + \frac{6EI}{L^2} \theta_2 + qL/2 = 0$$

$$\frac{2EI}{L} \theta_1 + \frac{4EI}{L} \theta_2 + qL^2/12 = 0$$

Il vient  $U_2 = 0$ ,  $F_{1X} = 0$  puis  $\theta_1 + \theta_2 = 0$ ,  $\theta_1 - \theta_2 = qL^3/12EI$  donc  $\theta_1 = qL^3/24EI$  et  $\theta_2 = -qL^3/24EI$  et enfin  $F_{1Y} = -qL/2$  et  $F_{2Y} = -qL/2$ .

Conformément aux équations précédentes, on peut ensuite calculer, par exemple, le moment fléchissant entre les nœuds.  $M(x) = M_{ij} - V_{ij}x + q(x - x_i)^2/2$ , i. e.  $M(x) = -qL/2 x + q x^2/2$ . Pour calculer  $y(x)$  et  $y'(x)$ , on se reporte également aux équations précédentes dans lesquelles  $C_1 = \theta_i/EI$  et  $C_2 = v_i/EI$  sont désormais connus.

### 8.2.6. Formule des trois moments à partir de la méthode de déplacements



Poutre continue sur appuis.

A partir de la matrice de rigidité de la poutre on peut écrire, en supposant EI constant :

$$M_A = -\frac{4EI}{L_{AB}}\theta_A - \frac{2EI}{L_{AB}}\theta_B + M_{AB}^0$$

$$M_B = +\frac{4EI}{L_{AB}}\theta_B + \frac{2EI}{L_{AB}}\theta_A + M_{BA}^0$$

$$M_B = -\frac{4EI}{L_{BC}}\theta_B - \frac{2EI}{L_{BC}}\theta_A + M_{BC}^0$$

$$M_C = +\frac{4EI}{L_{BC}}\theta_C + \frac{2EI}{L_{BC}}\theta_B + M_{CB}^0$$

où  $L_{AB}$  et  $L_{BC}$  sont respectivement les longueurs des poutres A-B et B-C. En éliminant  $\theta_A$  et  $\theta_C$  on obtient :

$$M_A + 2M_B = \frac{6EI}{L_{AB}}\theta_B + M_{AB}^0 + 2M_{BA}^0$$

$$M_C + 2M_B = -\frac{6EI}{L_{BC}}\theta_B + M_{CB}^0 + 2M_{BC}^0$$

En éliminant  $\theta_B$  il vient, à condition que  $EI$  soit le même dans les poutres de gauche et droite :

$$L_{AB} M_A + 2(L_{AB} + L_{BC}) M_B + L_{BC} M_C = L_{AB} (M_{AB}^0 + 2M_{BA}^0) + L_{BC} (M_{CB}^0 + 2M_{BC}^0)$$

On peut déjà utiliser cette formule pour résoudre relativement facilement certains problèmes de poutres continues sur appui si l'on ne dispose que du formulaire de la méthode des déplacements. Pour faire apparaître la formule des trois moments classique, on doit considérer que l'on connaît les rotations sur appuis des poutres A-B et B-C celles-ci étant séparées en condition isostatique. Ces rotations sont désignées par  $\theta^{d\text{ iso}}$  et  $\theta^{g\text{ iso}}$ , d et g signifiant que l'on est à droite ou à gauche de l'appui. Puisque les déplacements sur appui  $v_A$ ,  $v_B$  et  $v_C$  sont annulés (par construction), remarquons que la matrice de rigidité nous permet de calculer aisément ces rotations qui peuvent se mettre sous la forme :

$$-6EI \theta_B^{g\text{ iso}} = L_{AB} (M_{AB}^0 + 2M_{BA}^0)$$

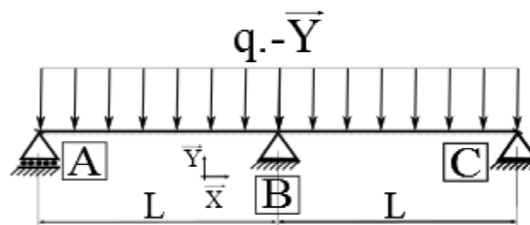
$$6EI \theta_B^{d\text{ iso}} = L_{BC} (M_{CB}^0 + 2M_{BC}^0)$$

On obtient finalement la **formule des trois moments ou formule de Clapeyron** :

$$L_{AB} M_A + 2(L_{AB} + L_{BC}) M_B + L_{BC} M_C = 6EI (\theta_B^{d\text{ iso}} - \theta_B^{g\text{ iso}})$$

Dans le cas d'une charge uniformément répartie  $q$  portée par  $-Y$ , on utilise  $\theta_B^{d\text{ iso}} = -qL_{BC}^3/24EI$  et  $\theta_B^{g\text{ iso}} = +qL_{AB}^3/24EI$ .

### 8.2.7. Exemple de mise en œuvre de la méthode dite des 3 moments



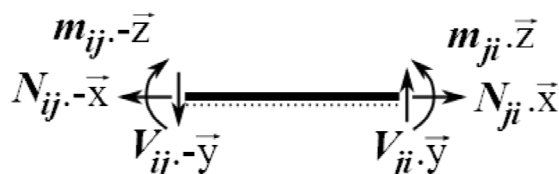
*Poutre continue sur 3 appuis uniformément chargée.*

Supposons une poutre continue sur 3 appuis uniformément chargée par une charge  $q$  portée par  $-Y$ . Aux extrémités non chargées par des couples extérieurs A et C on peut affirmer que  $M_A = M_C = 0$ . A l'aide des équations précédentes, on peut écrire que :

$$2 (L_{AB} + L_{BC}) M_B = (-qL_{BC}^3/4 + +qL_{AB}^3/4)$$

d'où  $M_B = -q(L_{BC}^3 + L_{AB}^3)/[8(L_{AB} + L_{BC})]$ . Si  $L_{AB} = L_{BC} = L$ , on retrouve bien que  $M_B = -qL^2/8$ . Ensuite, sachant que le moment fléchissant en B, désigné par  $M_B$ , peut être calculé à partir des efforts à gauche de B, il vient  $M_B = F_{AY} L - qL^2/2$  on déduit que la réaction d'appui selon Y en A vaut  $F_{AY} = qL/2 - qL/8 = 3qL/8$ . De même, en calculant le moment fléchissant en B à partir des efforts à droite de B il vient  $F_{CY} = 3qL/8$ . Enfin, la réaction d'appui selon Y en B doit assurer l'équilibre statique des efforts selon Y de sorte que  $F_{AY} + F_{BY} + F_{CY} - 2qL = 0$  donc  $F_{BY} = 5qL/4$ .

### 8.3. Formulaire



Action des nœuds sur la poutre.



Action de la poutre sur les nœuds.

	$V_{ij}^0 = q [(L + x_1)(L - x_1)^3 - (L + x_2)(L - x_2)^3] / (2L^3)$ $V_{ji}^0 = q [(x_1^3 (2L - x_1) - x_2^3 (2L - x_2))] / (2L^3)$ $M_{ij}^0 = q [(L + 3x_1)(L - x_1)^3 - (L + 3x_2)(L - x_2)^3] / (12L^2)$ $M_{ji}^0 = q [x_2^3 (4L - 3x_2) - x_1^3 (4L - 3x_1)] / (12L^2)$
	$V_{ij}^0 = qL / 2$ $V_{ji}^0 = -qL / 2$ $M_{ij}^0 = qL^2 / 12$ $M_{ji}^0 = qL^2 / 12$
	$V_{ij}^0 = F [(L + 2a) (L - a)^2] / (L^3)$ $V_{ji}^0 = F [(2a - 3L) a^2] / (L^3)$ $M_{ij}^0 = F [(L - a)^2 a] / (L^2)$ $M_{ji}^0 = F [(L - a) a^2] / (L^2)$
	$N_{ij}^0 = p (x_2 - x_1)(2L - x_2 - x_1) / (2L)$ $N_{ji}^0 = -p (x_2^2 - x_1^2) / (2L)$ <p style="text-align: center;">Si <math>x_1 \approx x_2 \approx a</math> et <math>F = p(x_2 - x_1)</math></p> $N_{ij}^0 = F (L - a) / L$ $N_{ji}^0 = -F a / L$

Report de charge sur les nœuds provenant de chargement entre les nœuds.

## 9. Flambement et instabilités de forme

### 9.1. Hypothèses de calcul

Les H. P. P. ne sont plus totalement vérifiées car les déplacements sont grands, les déformations restent petites et en élasticité linéaire. Il faut travailler dans la configuration déformée pour connaître les sollicitations extérieures. Comme il faut connaître les sollicitations extérieures pour calculer la déformée et réciproquement, on aboutit inévitablement à une équation différentielle.

### 9.2. Cas de la compression simple – flambement d'Euler

Considérons un poteau simplement comprimé tel que  $E(x_1)$ ,  $I_{G3}(x_1)$  et  $N(x_1)$  sont constants.

$$y''(x_1) = M_{3G}(x_1) / E I_{G3}$$

$$M_{3G}(x_1) = N y(x_1) \quad N < 0 \text{ en compression}$$

$$\text{D'où } y''(x_1) = N y(x_1) / E I_{G3}$$

La famille des solutions de ce problème est de la forme  $y(x_1) = a \cos \omega x_1 + b \sin \omega x_1$ . Considérons un poteau rotulé en tête et pied de longueur  $L$ , i. e.  $y(0) = 0$  et  $y(L) = 0$ . On en déduit que  $b = 0$  puis  $a \cos \omega L = 0$  donc que  $\omega = n \pi / L$  ( $n$  entier), enfin que  $\omega^2 = -N / E I_{G3}$ . Il vient donc  $n^2 \pi^2 / L^2 = -N / E I_{G3}$ . Concernant la constante  $a$ , elle peut prendre une valeur quelconque ce qui indique une situation instable, la déformée pouvant s'amplifier à effort normal constant. Par ailleurs, la valeur minimale de  $N$  sera obtenue pour  $n = 1$ . On en déduit qu'il ne faut pas dépasser une force de compression critique évaluée à :

$$N_c = -\pi^2 E I_{G3} / L_f^2$$

où  $L_f$  est appelée *longueur de flambement* et vaut  $L$  dans le cas de deux liaisons avec rotules. La longueur de flambement prend d'autres valeurs pour d'autres conditions de liaison :  $L/2$  pour deux encastremets et  $L/\sqrt{2}$  pour un côté avec rotule et l'autre encastéré.

*espace dessin et calculs, longueurs de flambement avec encastrement(s)*

Pratiquement, le flambement - si l'on n'a pas réussi à l'éviter - en compression simple est déclenché par des imperfections géométriques et/ou matériau puis amplifié par la déformation. Les sections finissent par tourner significativement et certaines des équations utilisées pour démontrer l'existence de l'instabilité deviennent approximatives. Le flambement - ou plutôt non-flambement - d'un élément de structure peut être étudié relativement simplement mais le flambement d'ensemble d'une structure nécessite un ordinateur. Les mots clés pour une éventuelle recherche sont : flambage, flambement, cloquage, voilement d'âme, déversement et instabilité de forme.

Lorsque que la sollicitation combine flexion et compression, il convient d'étudier avec soin l'instabilité de forme moment fléchissant et effort normal admissibles sont fortement liés. Heureusement, les règlements de construction prévoient que de nombreux cas pour lesquels l'élanement est relativement faible puissent être examinés de façon forfaitaire.

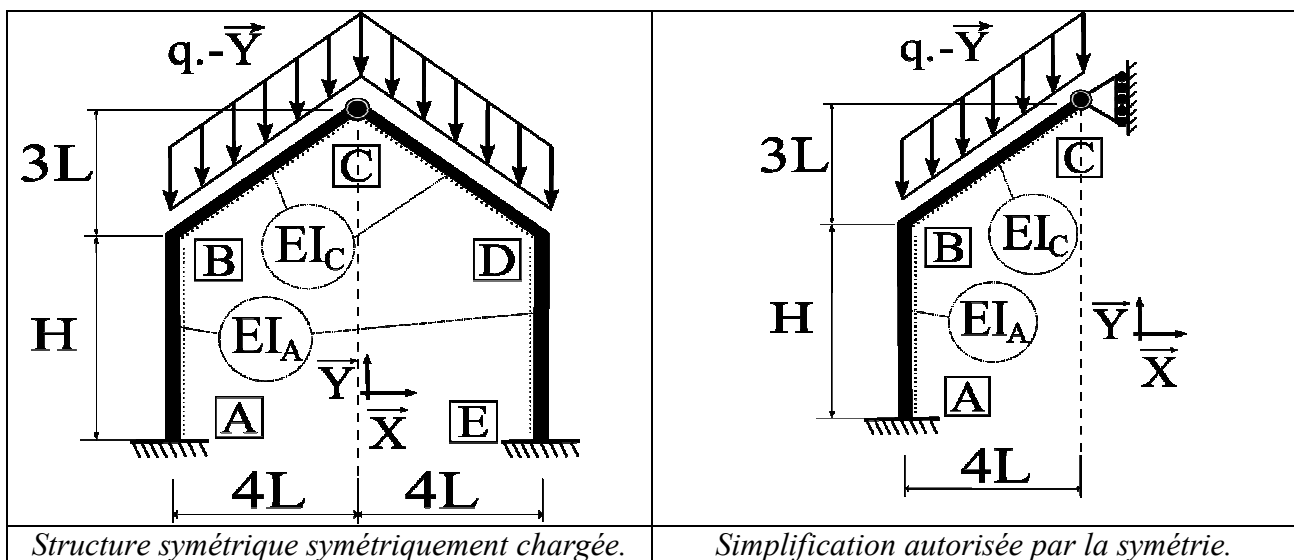
## 10. Exemple de résolution d'un problème de portique

### 10.1. Résolution par la méthode des forces

Considérons le portique de la figure suivante de gauche. Les poteaux sont encastrés en A et E, leur rigidité en flexion est définie par  $EI_A$ . Les poutres sont encastrées sur les poteaux et rotulées entre elles, leur rigidité en flexion est définie par  $EI_C$ . Une charge  $q$  de type poids propre est considérée en toiture. Il s'agit de montrer que si l'on modifie les rigidités relatives des poutres et poteaux, i. e. le rapport  $I_A / I_C$ , on change des valeurs de réaction d'appui, contrairement à une structure isostatique.

Le calcul du degré d'hyperstaticité donne  $d = 3 + 3 + 2 + 3 + 3 - 3 \times 4 = 2$ . En effet si, par exemple, on supprime les blocages en rotation des pieds de poteaux, i. e. on remplace les encastresments par des appuis simples, alors on obtient un portique à 3 rotules que nous connaissons isostatique.

La symétrie de la structure et du chargement permet d'affirmer que le déplacement du point C ne peut être que selon  $\bar{Y}$ . La cinématique de la figure suivante de droite pour un demi-portique permet donc de résoudre le problème plus simplement en réduisant le nombre d'inconnues de 2 à 1. Rappelons que le degré d'hyperstaticité est indépendant du chargement et, même avec un chargement symétrique, la structure demeure hyperstatique de degré deux. Du point de vue des équations, poser par exemple  $U_c = 0$  par raison de symétrie comme équation supplémentaire permet de ne plus avoir à trouver qu'une seule équation manquante qui, s'ajoutant aux trois équations d'équilibre permettra de résoudre le problème<sup>11</sup>.

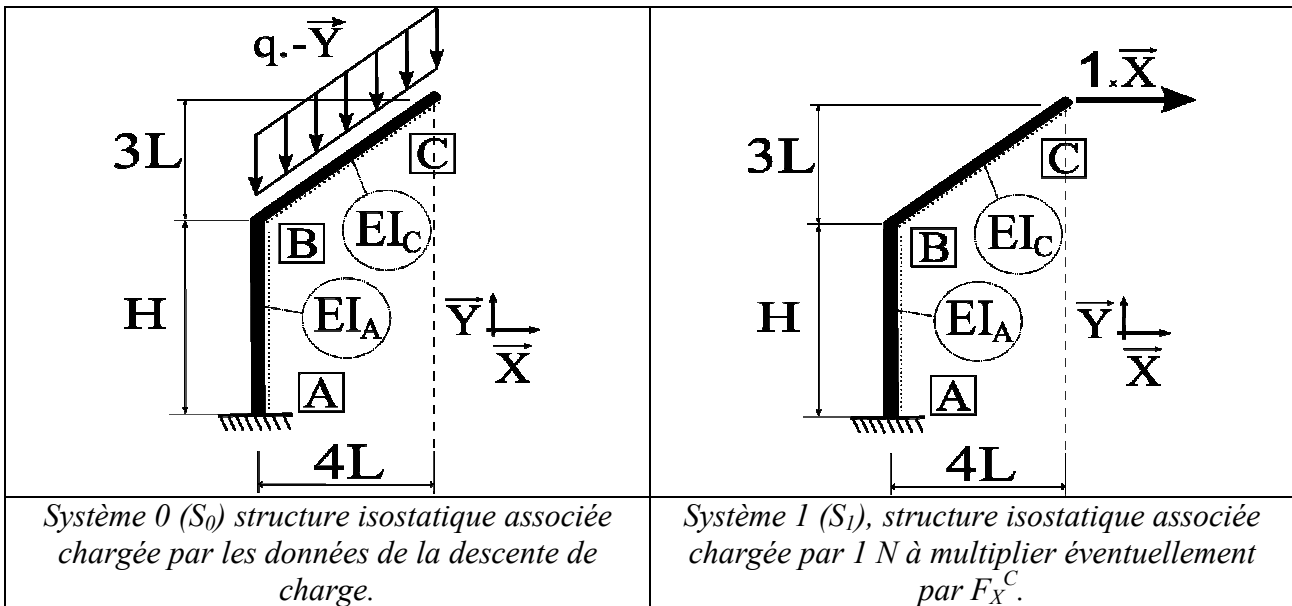


Pour résoudre, on peut par exemple choisir la structure isostatique des figures suivantes, l'« inconnue hyperstatique » étant la réaction d'appui glissant au point C. Il s'agit d'exprimer que la superposition des efforts du système 0 ( $S_0$ ) et de  $F_{XC}$  fois les efforts système 1 ( $S_1$ ) fournit le système à résoudre. Pour cela, la superposition des déformations doit respecter les conditions du système à résoudre. Donc, l'addition du déplacement de C selon  $\bar{X}$  dans  $S_0$ , noté  $u_{c0}$ , et du déplacement de C selon  $\bar{X}$  dans  $F_{XC} \cdot S_1$ , noté  $u_{c1}$ , doit donner 0.

$$F_{XC}^C \text{ doit être tel que } u_{c0}^c + u_{c1}^c = 0$$

Rappelons que l'utilisation de la superposition nécessite de respecter les hypothèses des petits déplacements et du comportement élastique linéaire de la matière.

<sup>11</sup>. On aurait aussi pu affirmer que les réactions d'appui verticales valent chacune  $5qL$  par raison de symétrie et d'équilibre.



Calcul de  $u_0^C$ :

On fait travailler les efforts de  $S_1$  dans les déformations de  $S_0$ . Pour plus de lisibilité, la charge unitaire virtuelle est notée  $1^*$ . En vertu du principe des travaux virtuels, en négligeant les déformations d'effort normal et tranchant devant celles du moment fléchissant, on écrit donc que

$$1^* u_0^C = \int_{\text{toute la Structure}} m_{1^*}(x) m_0(x) / EI(x) dx =$$

$$\int_{\text{poteau}} m_{1^*}(x) m_0(x) / EI_A dx + \int_{\text{poutre}} m_{1^*}(x) m_0(x) / EI_C dx$$

Le calcul de l'intégrale donne  $1^* u_0^C = H/EI_A (-10qL^2) 1/2 (\{-3L-H-3L\} 1^*) + 5L/EI_C 1/3 (-10qL^2) 3/4 (-3L 1^*)$  d'où l'on déduit que  $u_0^C = 5qL^2H(6L+H)/EI_A + 75qL^4/2EI_C$  porté par  $X$ .

Calcul de  $u_1^C$ :

On fait travailler les efforts de  $S_1$  dans les déformations de  $F_{XC}$ ,  $S_0$ . Comme précédemment, on écrit donc que

$$1^* u_1^C = \int_{\text{toute la Structure}} m_{1^*}(x) F_{X^C} m_1(x) / EI(x) dx$$

Le calcul de l'intégrale donne  $1^* u_1^C = H/3EI_A 1/6 2(9L^2 + \{3L+H\}^2 + 3L\{3L+H\}) F_{X^C} 1^* + 5L/EI_C 1/3 (-3F_{X^C}L) (-3L 1^*)$  d'où l'on déduit que  $u_{C1} = H/3EI_A (\{27L^2+H^2+9LH\} F_{X^C}) + 15L^3/EI_C F_{X^C}$  porté par  $X$ .  $F_{X^C}$  doit être tel que  $u_0^C + u_1^C = 0$  donc

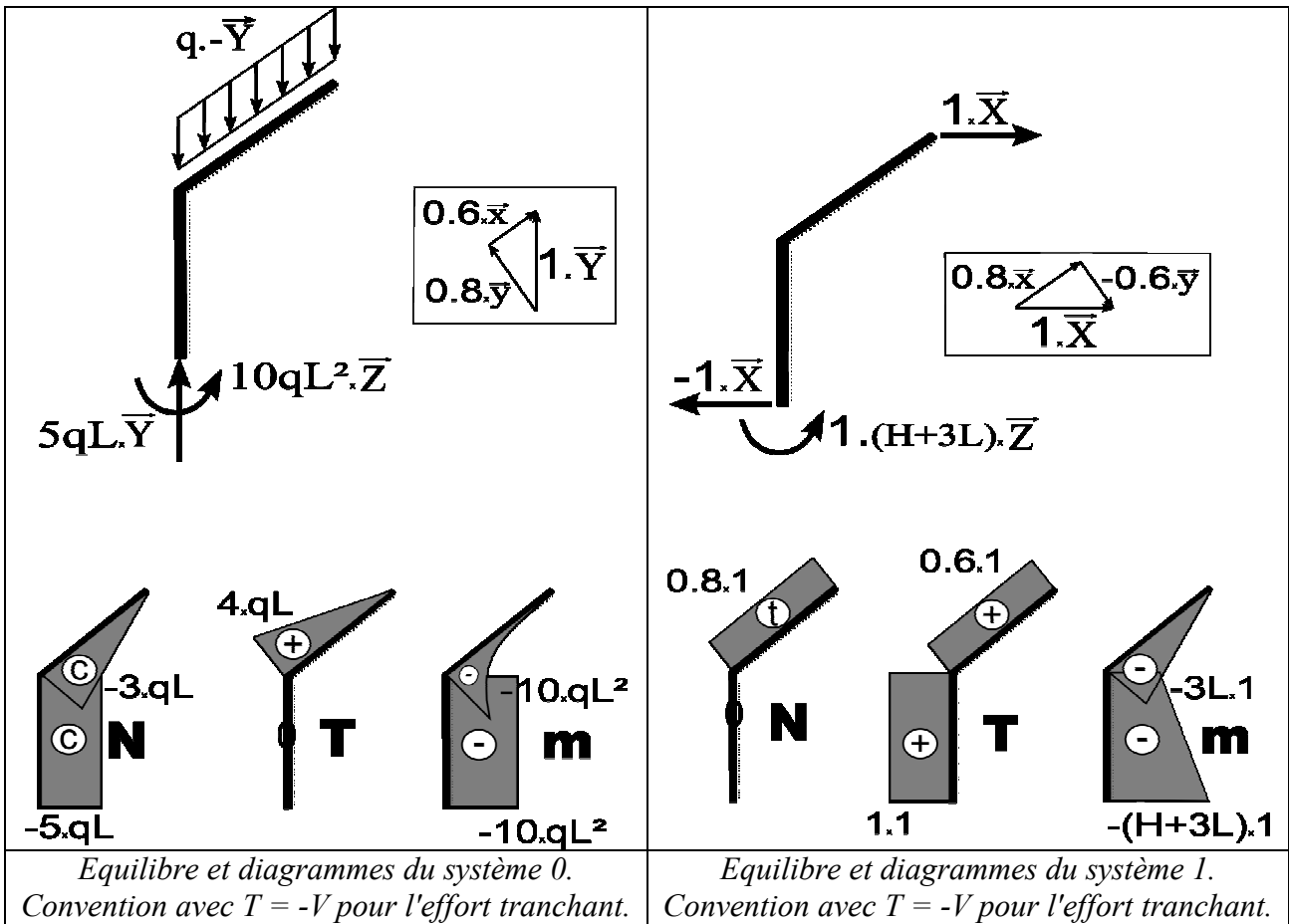
$$F_{X^C} = -q \frac{5L^2H(6L+H)/I_A + 75L^4/2I_C}{H(27L^2+H^2+9LH)/3I_A + 15L^3/I_C}$$

Si l'on désigne par  $\alpha$  le rapport  $I_C/I_A$  on peut faire mieux apparaître **la dépendance de cette réaction d'appui à rigidité relatives poutres/poteaux**.

$$F_{X^C} = -q \frac{5L^2H(6L+H) + 75L^4/2\alpha}{H(27L^2+H^2+9LH)/3 + 15L^3/\alpha}$$

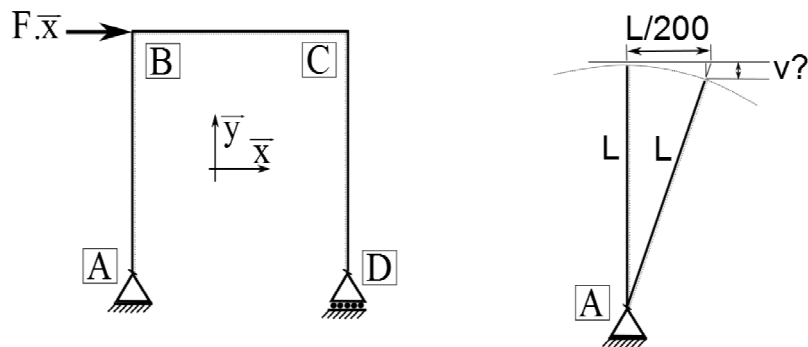
Considérant toujours le demi-système hyperstatique, l'équilibre impose que la composante selon  $X$  de la réaction d'appui en A vaut  $-F_{X^C}$  et le moment d'encastrement vaut  $10qL^2 + (3L+H) F_{XC}$  porté par  $Z$ . Dans ce cas, seule la composante selon  $Y$  en A qui vaut  $5qL$  est indépendante de  $I_C/I_A$ .





### 10.2. Remarque concernant les déplacements des têtes de poteau dans des portiques

En général les déformations liées à l'effort normal sont négligées devant celles de flexion, liées au moment fléchissant. Bien sûr, dans les systèmes triangulés (constitués de « bielles ») pour lesquels seul l'effort normal est non nul, il convient de considérer les déformations de cet effort pour calculer les déformations. **Si l'on néglige les déformations d'effort normal, une tête de poteau peut-elle monter ou descendre sous l'effet de la rotation du poteau ?** Considérons un cas simple où le poteau est rotulé en pied (si le poteau est encastré, la rotation globale sera moindre).



*Rotation du poteau et cinématique en négligeant les déformations d'effort normal.*

Pour la figure précédente cela revient à calculer le terme  $v$  sachant que la tête de poteau se déplace sur un cercle de rayon  $L$  et de centre  $A$ .  $v$  est la projection sur la verticale de la différence

entre la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle (ABB') et la longueur L. v est donc inférieur à cette différence. Les flèches sont typiquement limitées réglementairement à L/200 et la structure devra être dimensionnée pour respecter, entre autres, ce critère. Il vient donc :

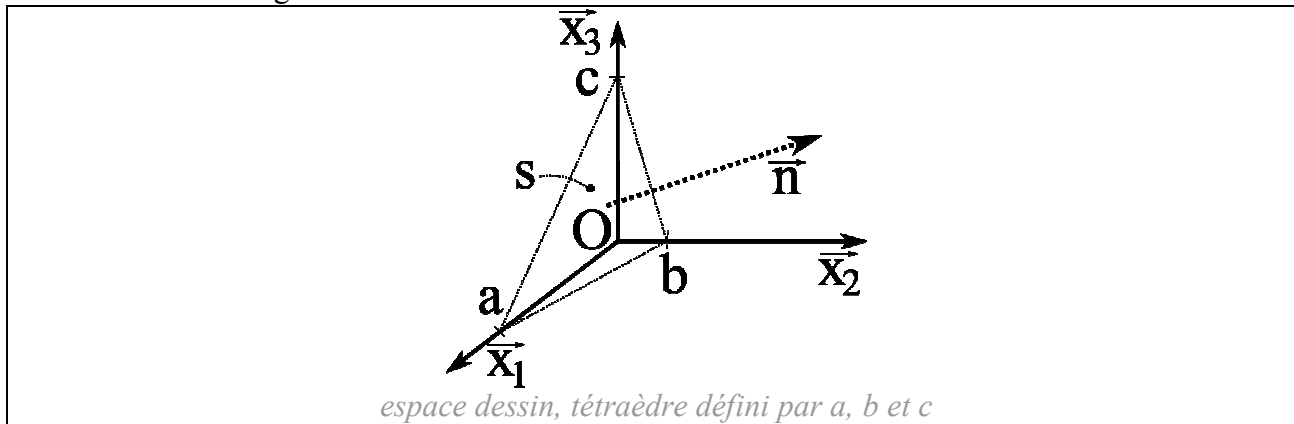
$$v \leq \sqrt{L^2 + (L/200)^2} - L$$

Ce qui donne  $v \leq 0.0000125 L$ . La cinématique de la déformation permet donc d'assimiler l'état initial et l'état déformé. Négliger les déformations d'effort normal revient donc dans ce type de cas à considérer que le déplacement vertical de B est nul.

Rappelons tout de même que l'étude des instabilités de flambement ne permet pas de faire l'assimilation entre la géométrie à l'état déformé et celle de l'état initial ...

## Annexe 1 : Un peu de géométrie pour un tétraèdre

On définit un triangle passant par les points  $a$ ,  $b$  et  $c$  distincts. On se place hors des cas particuliers où un de ces points correspond à  $0$  qui ont des solutions évidentes. Les points sont définis par  $\mathbf{Oa} = (a_1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{Ob} = (0, b_2, 0)$ ,  $\mathbf{Oc} = (0, 0, c_3)$ . La question posée est : quelle est la surface  $s$  de ce triangle ?



Pour cela, il faut situer le point  $d$  sur la droite  $\overline{ab}$  de sorte que  $a$ ,  $c$  et  $d$  ainsi que  $b$ ,  $c$  et  $d$  définissent deux triangles rectangles. On peut donc calculer  $s$  ainsi :

$$s = \frac{1}{2} (\|\mathbf{ad}\|^{1/2} \|\mathbf{cd}\|^{1/2} + \|\mathbf{db}\|^{1/2} \|\mathbf{cd}\|^{1/2})$$

Etant donné que  $\mathbf{ad}$  est colinéaire à  $\mathbf{db}$  on peut réécrire :

$$s = \frac{1}{2} \|\mathbf{ab}\|^{1/2} \|\mathbf{cd}\|^{1/2}$$

$d \in \overline{ab}$  définie par  $x_1/a_1 + x_2/b_2 = 1$ . De plus  $\mathbf{cd}$  doit être perpendiculaire à  $\mathbf{ab}$ . Puisque  $\mathbf{cd} = \mathbf{cO} + \mathbf{Od} = (d_1, d_2, -c_3)$  et  $\mathbf{ab} = \mathbf{aO} + \mathbf{Ob} = (-a_1, b_2, 0)$ , on écrit donc :

$$(d_1, d_2, -c_3) \cdot (-a_1, b_2, 0) = 0 \Rightarrow d_1 = d_2 b_2 / a_1$$

en reportant dans l'équation de la droite on obtient  $d_2 b_2 / a_1^2 + d_2 / b_2 = 1$ , d'où :

$$d_1 = a_1 b_2^2 / (a_1^2 + b_2^2) \text{ et } d_2 = a_1^2 b_2 / (a_1^2 + b_2^2)$$

On peut maintenant calculer  $\|\mathbf{cd}\|$  :

$$\|\mathbf{cd}\|^2 = (a_1^4 b_2^2 + a_1^2 b_2^4) / (a_1^2 + b_2^2)^2 + c_3^2 = (a_1^2 b_2^2) / (a_1^2 + b_2^2) + c_3^2$$

Puis enfin

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 b_2^2 + a_1^2 c_3^2 + c_3^2 b_2^2}$$

Ensuite on cherche la normale unitaire  $\mathbf{On} = (n_1, n_2, n_3)$  à cette surface. Le vecteur  $\mathbf{On}$  devra être perpendiculaire à  $\mathbf{ab}$ ,  $\mathbf{ac}$  et par conséquent  $\mathbf{bc}$ . On peut donc écrire que  $-a_1 n_1 + b_2 n_2 = 0$  et que  $-a_1 n_1 + c_3 n_3 = 0$  d'où  $n_2 = n_1 a_1 / b_2$  et  $n_3 = n_1 a_1 / c_3$ . Pour que  $\mathbf{On}$  soit unitaire il faut que  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$  d'où :

$$n_1^2 (1 + a_1^2 / b_2^2 + a_1^2 / c_3^2) = 1 \Leftrightarrow n_1^2 (a_1^2 b_2^2 + a_1^2 c_3^2 + c_3^2 b_2^2) = c_3^2 b_2^2 \Leftrightarrow n_1^2 = b_2^2 c_3^2 / 4 s^2$$

Et on obtient finalement  $n_1 = b_2 c_3 / 2 s$  et de même  $n_2 = a_1 c_3 / 2 s$  et  $n_3 = a_1 b_2 / 2 s$ . Donc :

$$\boxed{2 s n_1 = b_2 c_3 \quad 2 s n_2 = a_1 c_3 \quad 2 s n_3 = a_1 b_2}$$

## Annexe 2 : Section réduite liée au cisaillement

La loi de Hooke de l'élasticité linéaire exprime que la contrainte de cisaillement  $\tau$  est proportionnelle à la distorsion  $\gamma$  :

$$\tau = \mu \gamma$$

ou encore pour la notation de la MMC  $\sigma_{ij} = \mu \gamma_{ij} = 2 \mu \varepsilon_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}$  car  $\gamma_{ij} \equiv 2 \varepsilon_{ij}$

L'équilibre (ceci revient à écrire que  $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{0}$  pour calculer l'évolution de  $\partial\tau(x_2) / \partial x_2$  en fonction de  $\partial\sigma(x_1) / \partial x_1$ , cette dernière évolution étant liée à l'évolution du moment fléchissant selon  $x_1$  donc à l'effort tranchant) de la section impose qu'en  $x_1$  :

$$\tau(x_2) = \frac{T S(x_2)}{I_{G3} b(x_2)} \quad \text{donc} \quad \gamma = \frac{T S(x_2)}{\mu I_{G3} b(x_2)}$$

On rappelle que  $S(x_2) = \int_{x_2}^{V_{\text{sup.}}} b(\psi) \psi \, d\psi$

La densité d'énergie élastique de cisaillement vaut  $\frac{1}{2} \tau \gamma$ . Un élément de volume pour un tronçon de poutre de longueur  $dl$  vaut  $d\Omega = b(x_2) dx_2 dl$ . En intégrant sur la section on obtient :

$$dW = \int_{V_{\text{inf.}}}^{V_{\text{sup.}}} \frac{1}{2} \tau(x_2) \gamma(x_2) b(x_2) dx_2 dl$$

en remplaçant  $\tau$  et  $\gamma$  par leurs expressions on fonction de  $V$ ,  $S(x_2)$ ,  $\mu$ ,  $I_{G3}$  et  $b(x_2)$  on obtient :

$$dW = \int_{V_{\text{inf.}}}^{V_{\text{sup.}}} \frac{1}{2\mu} \frac{T^2 S^2(x_2)}{I_{G3}^2 b(x_2)} dx_2 dl$$

$$\Leftrightarrow \frac{dW}{dl} = \frac{1}{2\mu} \frac{T^2}{I_{G3}^2} \int_{V_{\text{inf.}}}^{V_{\text{sup.}}} \frac{S^2(x_2)}{b(x_2)} dx_2$$

où apparaît un terme caractérisant la géométrie de la section. On introduit le terme "section

réduite" de sorte que  $\gamma_{\text{équivalent}} = \frac{T}{\mu S_r}$  d'où :

$$\frac{1}{S_r} = \frac{1}{I_{G3}^2} \int_{V_{\text{inf.}}}^{V_{\text{sup.}}} \frac{S^2(x_2)}{b(x_2)} dx_2$$

Par exemple pour une section rectangulaire de dimensions  $b \times h$ , on obtient :

$$\frac{1}{S_r} = \frac{144}{b^2 h^6} \int_{-h/2}^{+h/2} \{b [(h/2)^2 - x_2^2] / 2\}^2 / b dx_2 = \frac{6}{5 b h} \quad \Leftrightarrow \quad S_r = \frac{5 b h}{6} = \frac{5 A}{6}$$

A l'aide de ces notations, on peut donc réécrire :

$$\frac{dW}{dl} = \frac{T^2}{2 \mu S_r}$$

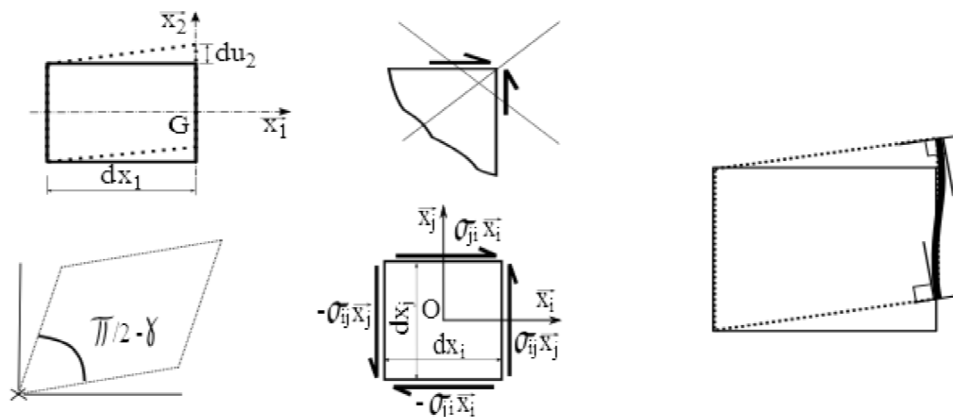
### A3. Démonstration inverse du TFS à partir du PTV...

...ou du théorème fondamental de la dynamique (T.F.D.) à partir du principe des puissances virtuelles (P.P.V.). Si l'on avait postulé le principe des travaux virtuels (P.T.V.), on aurait procédé à la démonstration du théorème fondamental de la statique. Pour ce faire, il suffit de considérer un mouvement de solide rigide quelconque tel que le travail des efforts intérieurs est nul. Le travail des efforts extérieurs doit donc être nul lui aussi. On démontre donc par translations que la somme des forces est nulle et par rotations que la somme des moments par rapport à tout point est nulle. Il est plus facile de faire cette démonstration inverse mais généralement l'équilibre est plus intuitif que les puissances virtuelles.

## Annexe 4 : En quoi la théorie des poutres n'est pas une solution exacte ?

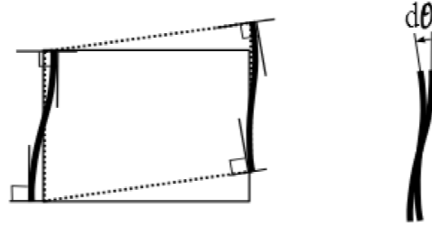
### A4. 1 Gauchissement des sections

Etudions plus en détail l'admissibilité de la solution proposée par la théorie des poutres. On peut dire qu'elle est partout cinématiquement admissible et qu'elle respecte partout la loi de comportement. Est-elle cinématiquement admissible. En annexe 2, pour connaître la distribution de la contrainte de cisaillement, nous avons établi que  $\tau(x_2) = \frac{V S(x_2)}{I_{G3} b(x_2)}$  en écrivant que l'évolution de  $\tau(x_2)$  satisfait à l'équilibre. Ceci revient à écrire que  $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{0}$ . Ainsi, il est montré que la contrainte de cisaillement est nulle en fibre supérieure ( $x_2 = v$ ) et en fibre inférieure ( $x_2 = -v'$ ). Cela est-il compatible avec la cinématique proposée, i. e. "les sections droites restent droites". Comme le montre la figure suivante, il est clair que, les faces supérieures et inférieures de la poutre étant libres de contrainte de cisaillement, du fait de la réciprocité des contraintes tangentielles, on ne peut pas équilibrer une contrainte de cisaillement en fibre supérieure et inférieure avec l'hypothèse des sections qui restent droites. Les sections se gauchissent donc obligatoirement en présence d'effort tranchant. Ce gauchissement reste négligeable dans la plupart des cas.



*Incompatibilité des conditions aux limites en cisaillement.*

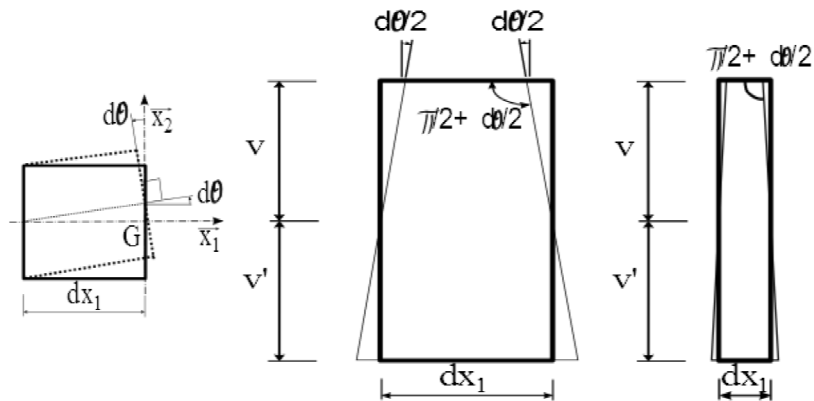
On peut tout de même remarquer que seule une évolution du gauchissement compliquerait le problème d'évaluation des contraintes normales. En effet, si le gauchissement est constant, il est toujours aisé de calculer les déformations (allongement ou raccourcissement) des fibres longitudinales dans la section et la distribution des contraintes normales est linéaire malgré le gauchissement si celui-ci est constant.



*Gauchissement des sections sans variation du gauchissement.*

### **A4. 2 Flexion circulaire**

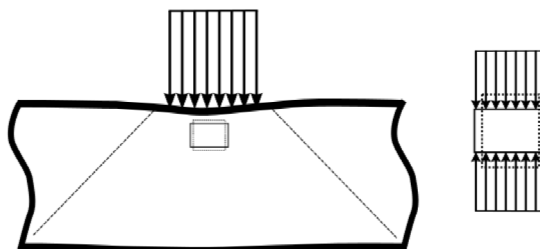
Supposons que seul le moment fléchissant soit non nul, i. e. "flexion circulaire", comme par exemple en section centrale d'une poutre en flexion "4 points". Comme le montre la figure suivante, la cinématique ne conserve pas les angles droits des coins. Par exemple, pour le coin supérieur droit, la distorsion vaut  $\partial\theta/2$ . Nous avons établi que  $\partial\theta/\partial x_1 = y'' = M/EI$ . Pour un segment de longueur  $dx_1$  nous avons donc  $d\theta = \partial\theta/\partial x_1 dx_1 = M dx_1/EI$ . La distorsion vaut donc  $\gamma = -M dx_1/2EI$  qui est un terme du second ordre. La flexion seule n'engendre donc pas de gauchissement considérable. Dans le cas de flexion circulaire, la théorie des poutres fournit donc un outil précis.



*La flexion ne génère pas de distorsion au premier ordre.*

### **A4. 3 Loin des points d'application des charges...**

C'est ici que la théorie des poutres connaît son point faible. Elle ne prédit pas de contraintes normale selon  $x_2$  et ne peut donc pas assurer l'équilibre. Toutefois, le calcul de la déformée intégrant les déformations partout, ces erreurs locales sont difficilement mesurables lorsqu'on s'intéresse aux déplacements (intégration de  $y''$ ). En outre, si l'on se reporte à l'exemple du calcul de déformée, on constate que la contrainte  $\sigma_{22}$  est généralement petite devant la contrainte  $\sigma_{11}$  normale prédite par la théorie des poutres. Néanmoins, il faut procéder à des vérifications particulières dans les zones de charge concentrée.



*Charge concentrée et contrainte normale  $\sigma_{22}$ .*

## Annexe 5 : Théorème des travaux virtuels, que serait la démonstration pour une poutre droite ?

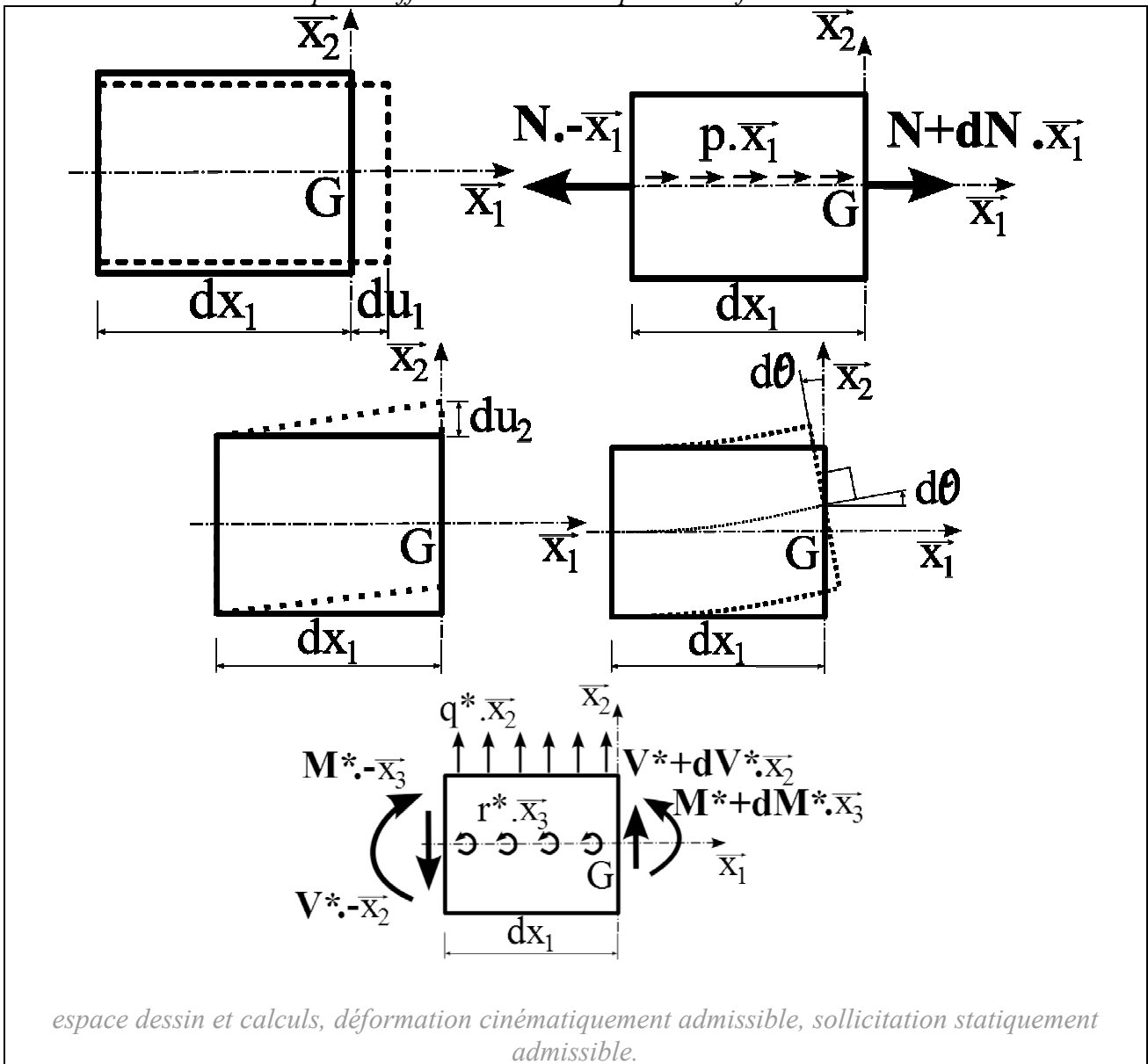
### A5.1 Préambule

Cette partie n'est là que pour montrer que cette démonstration n'est pas plus simple avec la théorie des poutres - bien au contraire - mais tout de même possible. Il faut donc la considérer comme un exercice de style. Nonobstant cette démonstration est bien peu élégante. Postuler le P. P. V. est généralement la solution la plus simple pour les démonstrations.

### A5.2 Champs cinématiquement admissible et statiquement admissible

Considérons une déformation de poutre constituée d'une composante associée à l'effort normal,  $\varepsilon_N = \partial u_1 / \partial x_1$ , une à l'effort tranchant,  $\gamma_V = \partial u_2 / \partial x_1$ , et une à la flexion,  $y''(x_1) = \partial \theta / \partial x_1$ . Cette déformation est cinématiquement admissible, elle respecte les conditions d'appui, ne génère pas de brisure ni d'interpénétration de matière. Considérons par ailleurs une sollicitation de cette même poutre constituée de charges réparties ( $p(x_1)$ ,  $q(x_1)$ ,  $r(x_1)$ ) et de torseurs résultants ( $N^*$ ,  $V^*$ ,  $M^*$ ) aux extrémités de sorte que cette poutre soit en équilibre.

Attention à la notation :  $V$  pour l'effort tranchant et  $v$  pour sa déformation.



Pour un tronçon de poutre tel que  $dx_1$  est petit, l'équilibre impose que :

$$-N(x_1) + N(x_1 + dx_1) + p \cdot dx_1 = -N(x_1) + N(x_1) + dN(x_1) + p \cdot dx_1 = 0$$

$$-V(x_1) + v(x_1 + dx_1) + q \cdot dx_1 = -V(x_1) + V(x_1) + dV(x_1) + q \cdot dx_1 = 0$$

$$-M(x_1) + M(x_1 + dx_1) + r \cdot dx_1 + V(x_1) \cdot dx_1 - q(x_1) \cdot dx_1^2/2 \approx$$

$$-M(x_1) + M(x_1) + dM(x_1) + r \cdot dx_1 + V(x_1) \cdot dx_1 = 0$$

Donc :

$$dN(x_1) = -p \cdot dx_1 \Leftrightarrow \partial N(x_1) / \partial x_1 = -p$$

$$dV(x_1) = -q \cdot dx_1 \Leftrightarrow \partial V(x_1) / \partial x_1 = -q$$

$$dM(x_1) = -\{V(x_1) + r\} \cdot dx_1 \Leftrightarrow \partial M(x_1) / \partial x_1 = -\{V(x_1) + r\}$$

### A5.3 Travail des efforts intérieurs

Le travail des efforts intérieurs ( $N^*$ ,  $V^*$ ,  $M^*$ ) dans les déformations ( $\varepsilon_N$ ,  $\gamma_V$ ,  $y''$ ) vaut :

$$W_{\text{int.}} = \int_0^L \{N^*(x_1) \cdot \varepsilon_N(x_1) + T^*(x_1) \cdot \gamma_T(x_1) + M^*(x_1) \cdot y''(x_1)\} dx_1$$

### A5.4 Termes liés à l'effort normal

Calculons le terme  $W_{\text{int. N}}$  lié à l'effort normal :

$$W_{\text{int. N}} = \int_0^L N^*(x_1) \cdot \varepsilon_N(x_1) dx_1$$

En remarquant que  $(N^* \cdot u)' = N^* \cdot \varepsilon_N + N^{*'} \cdot u$  puisque  $u' = \varepsilon_N$  et en intégrant par partie, on obtient :

$$W_{\text{int. N}} = \int_0^L [(N^* \cdot u)' - N^{*'} \cdot u] dx_1 = N^* \cdot u \Big|_0^L + \int_0^L p^* \cdot u dx_1$$

$$W_{\text{int. N}} = N^*(L) \cdot u(L) - N^*(0) \cdot u(0) + \int_0^L p^* \cdot u dx_1$$

Lorsque  $p_F^*$  représente une charge concentrée (ou plusieurs, il suffira de considérer une superposition), c'est à dire si :

$$p_F^*(x_1) = 0 \text{ si } x_1 \notin [x_{1F} - \Delta, x_{1F} + \Delta] \quad \text{et} \quad \int_{x_{1F} - \Delta}^{x_{1F} + \Delta} p_F^*(x_1) dx_1 = F_1^*$$

où  $x_{1F}$  désigne le barycentre de la charge concentrée et  $F_1^*$  une force ponctuelle d'axe  $x_1$ . Si  $\Delta$  tend vers 0 alors on peut considérer que  $u_1(x_1)$  est quasiment constant dans l'intervalle  $[x_{1F} - \Delta, x_{1F} + \Delta]$  et vaut  $u_1(x_{1F})$ . On peut donc dire dans ce cas que :

$$\int_0^L p_F^* \cdot u_1 dx_1 = F_1^* \cdot u_1(x_{1F})$$



La démonstration rigoureuse fait intervenir la fonction de Dirac  $\delta(x_{1F})$  de sorte que l'on écrit  $p_F^*(x_1) = F_1 \cdot \delta(x_{1F})$ , puis :

$$\int_0^L F_1 \cdot \delta(x_{1F}) u_1(x_1) dx_1 = F_1 \int_0^L \delta(x_{1F}) u_1(x_1) dx_1 \equiv F_1^* \cdot u_1(x_{1F})$$

Toutefois, il faut se rappeler que, dans le cadre de l'hypothèse de Saint Venant, la théorie des poutres ne s'applique que loin des points d'application des charges ponctuelles. Pratiquement, la modélisation mathématiquement rigoureuse n'a donc pas beaucoup plus de sens que l'approximation d'une charge ponctuelle à une charge répartie sur une courte distance.

### ***A5. 5 Termes liés à l'effort tranchant***

Calculons de même le terme  $W_{\text{int. } v}$  lié à l'effort tranchant. Notons  $v$  la déformation d'effort tranchant d'axe  $x_2$ .

$$W_{\text{int. } v} = \int_0^L V^*(x_1) \cdot \gamma_T(x_1) dx_1$$

En remarquant que  $(V^* \cdot v)' = V^* \cdot \gamma_V + V^{*'} \cdot v$  puisque  $v' = \gamma_V$  et en intégrant par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} W_{\text{int. } v} &= \int_0^L [(V^* \cdot v)' - V^{*'} \cdot v] dx_1 = V^* \cdot v \Big|_0^L + \int_0^L q_F^* \cdot v dx_1 \\ W_{\text{int. } v} &= V^*(L) \cdot v(L) - V^*(0) \cdot v(0) + \int_0^L q_F^* \cdot v dx_1 \end{aligned}$$

Lorsque  $q_F^*$  représente une charge concentrée (ou plusieurs, il suffira de considérer une superposition), c'est à dire si :

$$q_F^*(x_1) = 0 \text{ si } x_1 \notin [x_{1F} - \Delta, x_{1F} + \Delta] \quad \text{et} \quad \int_{x_{1F} - \Delta}^{x_{1F} + \Delta} q_F^*(x_1) dx_1 = F_2^*$$

où  $x_{1F}$  désigne le barycentre de la charge concentrée et  $F_2^*$  une force ponctuelle d'axe  $x_2$ . Si  $\Delta$  tend vers 0 alors on peut considérer que  $v(x_1)$  est quasiment constant dans l'intervalle  $[x_{1F} - \Delta, x_{1F} + \Delta]$  et vaut  $v(x_{1F})$ . On peut donc dire dans ce cas que :

$$\int_0^L q_F^* \cdot v dx_1 = F_2^* \cdot v(x_{1F})$$

La démonstration rigoureuse fait intervenir la fonction de Dirac  $\delta(x_{1F})$  de sorte que l'on écrit  $q_F^*(x_1) = F_2 \cdot \delta(x_{1F})$ , puis :

$$\int_0^L F_2 \cdot \delta(x_{1F}) v(x_1) dx_1 = F_2 \int_0^L \delta(x_{1F}) v(x_1) dx_1 \equiv F_2^* \cdot v(x_{1F})$$

### ***A5. 6 Termes liés au moment fléchissant***

Calculons de même le terme  $W_{\text{int. } M}$  lié au moment fléchissant. Notons  $y$  la déformation de flexion d'axe  $x_2$ .

$$W_{\text{int. M}} = \int_0^L M^*(x_1).y''(x_1) dx_1$$

En remarquant que  $(M^*.y')' = M^*.y'' + M^{*'}.y'$  et en intégrant par partie, on obtient :

$$W_{\text{int. M}} = \int_0^L [(M^*.y'')' - M^{*'}.y'] dx_1 = M^*.y' \Big|_0^L + \int_0^L (V^* + r^*).y' dx_1$$

$$W_{\text{int. M}} = M^*(L).y'(L) - M^*(0).y'(0) + \int_0^L r^*.y' dx_1 + \int_0^L V^*.y' dx_1$$

Lorsque  $r_F^*$  représente un couple ponctuel (ou plusieurs, il suffira de considérer une superposition), c'est à dire si  $r_F^*(x_1) = C_3.\delta(x_{1F})$  où  $x_{1F}$  désigne le point d'application du couple et  $C_3^*$  le couple d'axe 3, alors il vient :

$$\int_0^L C_3.\delta(x_{1F}) y'(x_1) dx_1 = C_3 \int_0^L \delta(x_{1F}) y'(x_1) dx_1 \equiv C_3^*.y'(x_{1F})$$

où  $y'(x_{1F})$  est la rotation d'axe 3 du point  $x_{1F}$  aussi notée  $\theta(x_{1F})$ . Concernant le terme d'effort tranchant, on remarque que  $(V^*.y)' = V^*.y' + V^{*'}.y$  d'où

$$\int_0^L V^*.y' dx_1 = \int_0^L [(V^*.y)' + q^*.y] dx_1 = V^*.y \Big|_0^L + \int_0^L q^*.y dx_1$$

$$= V^*(L).y(L) - V^*(0).y(0) + \int_0^L q^*.y dx_1$$

où l'on peut à nouveau considérer dans le cas d'une charge ponctuelle  $F_2^*$  (ou plusieurs charges ponctuelles  $F_{2i}^*$  associées aux abscisses  $x_{1Fi}$ , en superposant) que :

$$\int_0^L q^*.y dx_1 = F_2^*.y(x_{1F})$$

### A5. 7 Total du travail des efforts intérieurs

Notons  $u_2$  le déplacement d'axe 2, i. e.  $u_2 = y + v$ . Il vient :

$$W_{\text{int.}} = N^*(L).u(L) - N^*(0).u(0) + V^*(L).v(L) - V^*(0).v(0)$$

$$+ M^*(L).\theta(L) - M^*(0).\theta(0) + \int_0^L p^*.u_1 dx_1 + \int_0^L q^*.u_2 dx_1 + \int_0^L r^*.\theta dx_1$$

$$+ \sum_{i=1}^n F_{1i}^*.u_1(x_{1Fi}) + \sum_{j=1}^m F_{2j}^*.u_2(x_{1Fj}) + \sum_{k=1}^p C_{3k}^*.\theta(x_{1Fk})$$

où l'on reconnaît dans le second terme de cette égalité le travail des efforts extérieurs. On peut donc affirmer que, si les champs sont admissibles, le travail des efforts intérieurs est égal au travail des efforts extérieurs. Ceci est aussi vrai dans le cas de poutres courbes, de plaques etc. mais, par souci de simplicité, l'on se reportera à une démonstration plus générale (voir ci-avant) plutôt que

de compliquer la démonstration avec une courbure ou d'autres sources de complexité. On remarque que l'on n'a pas fait ici d'hypothèses de petits déplacements ni d'élasticité linéaire.

## Annexe 6 : Relation de conversion entre rayon de courbure et contraintes internes résiduelles

### A6. 1 Introduction

On montre ici comment la théorie des poutres peut servir en mécanique des matériaux. Lors d'un refroidissement ou d'une trempe, la matière se fige de façon non uniforme et des contraintes résiduelles apparaissent. Elles sont recherchées, par exemple dans le cas du verre, pour mettre la "peau" en compression afin de rendre plus difficile un démarrage de fissuration en surface. En outre, les vitesses de refroidissement diffèrent entre le cœur et la peau. La microstructure du matériau peut dépendre de la vitesse de refroidissement et donc influencer sur ses propriétés mécaniques. Le cas des polymères semi-cristallins est un exemple de ce type de situation. La cristallisation est influencée par la vitesse de refroidissement. A cœur, là où la vitesse est plus lente, les sphérolites sont plus gros qu'en peau. La proportion de phase amorphe rapportée à la phase cristalline peut aussi varier. Ainsi, les propriétés mécaniques peuvent varier dans l'épaisseur, en même temps que les contraintes résiduelles.

On peut tenter de mesurer ces propriétés mécaniques locales par microindentation (Alchikh et al., 2010; Alchikh, 2009). On peut aussi obtenir une information à l'aide de la théorie des poutres.

### A6. 2 Enoncé du problème

Les contraintes internes résiduelles dans une plaque de polymère, par exemple, peuvent être mesurées par la méthode d'enlèvement de couches ou lamelles. La formule de Stoney (Stoney, 1909) permet de calculer ces contraintes résiduelles en mesurant le rayon de courbure de la plaque après l'enlèvement successif de lamelles. Dans cette formule, le module d'Young est supposé constant dans la hauteur de la plaque (axe  $y$ ). Cependant dans notre développement original suivant, le module d'Young peut varier en fonction de la hauteur  $y$ .

La plaque du polymère de hauteur initiale  $h_0$  est supposée multicouche et composée de  $n$  lamelles, le module d'Young  $E(y)$  peut varier continûment dans la hauteur de la plaque mais pas dans l'épaisseur (axe  $z$ ). La contrainte résiduelle pour chaque fibre  $\sigma_R(y)$  est donc constante selon  $z$  dans le plan de la fibre.

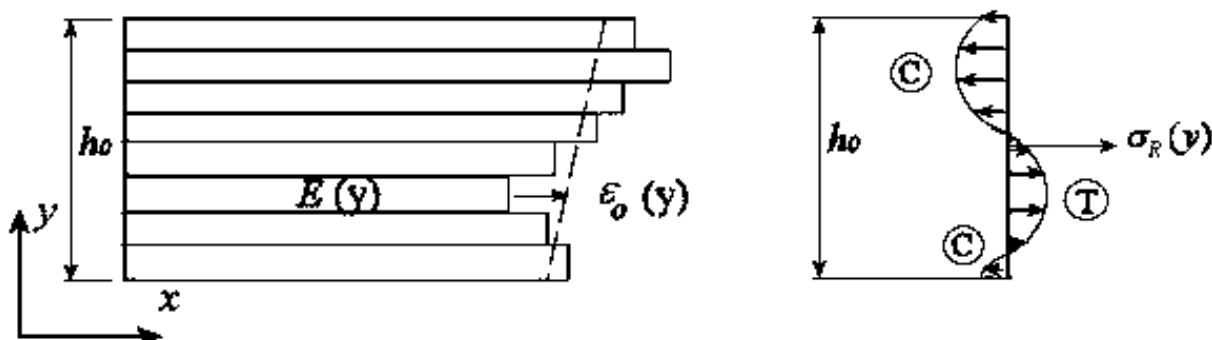


Figure A. 6. 1. : schéma de calcul : à gauche : la plaque est divisée en plusieurs lamelles. A droite une distribution supposée de contraintes internes résiduelles,  $\ominus$  pour les fibres comprimées et  $\oplus$  pour les fibres tendues.

Les déformations générées par les contraintes résiduelles dans les différentes fibres sont supposées élastiques. D'après l'hypothèse de Navier-Bernoulli de la théorie des poutres « Les sections planes et normales à la fibre moyenne avant la déformation restent planes et normales à la

« fibre moyenne après la déformation » (Laroze, 1988), le déplacement d'une section droite est un déplacement de corps solide. Les sections droites restent droites (ne gauchissent pas) et se translatent et tournent simplement les unes par rapport aux autres. Nous écrivons l'équation du comportement de déformation élastique initiale à faible amplitude pour chacune des fibres. La « loi de **Hooke** » en théorie des poutres se résume à :

$$\sigma_R(y) = E(y) \varepsilon_0(y)$$

avec une déformation initiale d'une fibre  $\varepsilon_0(y) = \frac{L-l_0(y)}{l_0(y)} \approx \frac{L-l_0(y)}{L}$ , où  $L$  désigne la longueur de la plaque en absence de force extérieure et  $l_0(y)$  la longueur de la fibre "libre de contrainte", c'est à dire non déformée par les contraintes résiduelles.

### ***A6. 3 Equations d'équilibre de la poutre en absence de force extérieure***

L'effort normal  $N$  (égale à la somme des contraintes par rapport à la section) est nul :

$$N_0 = \text{ép.} \times \int_0^{h_0} \sigma_R(y) dy = \text{ép.} \times \int_0^{h_0} E(y) \varepsilon_0(y) dy = 0$$

où ép. désigne l'épaisseur des lamelles dans la direction z. La somme du moment fléchissant  $M$  par rapport à la section est nulle aussi :

$$M_0 = \text{ép.} \times \int_0^{h_0} \sigma_R(y) (y - y_m(h_0)) dy = \text{ép.} \times \int_0^{h_0} E(y) \varepsilon_0(y) (y - y_m(h_0)) dy = 0$$

où la fibre moyenne  $y_m$  est définie comme :

$$\int_0^h (y - y_m) E(y) dy = 0 \Leftrightarrow y_m(h) = \frac{\int_0^h y E(y) dy}{\int_0^h E(y) dy}$$

Si maintenant nous enlevons une lamelle, la plaque retrouve une situation d'équilibre statique par une déformation de flexion et d'allongement ou rétrécissement. Nous pouvons écrire alors :

$$\varepsilon(y) - \varepsilon_0(y) = a y + b = \frac{(\varepsilon_{inf.} - \varepsilon_{0inf.}) - (\varepsilon_{sup.} - \varepsilon_{0sup.})}{h}$$

$\varepsilon(y)$  désigne la déformation à  $y$  après l'enlèvement de la lamelle. L'indice 0 correspond à l'état avant enlèvement de matière.

La courbure  $a$  est définie par :

$$a = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} = \frac{(\varepsilon_{inf.} - \varepsilon_{0inf.}) - (\varepsilon_{sup.} - \varepsilon_{0sup.})}{h}$$

$R_0$  et  $R$  : Rayon de courbure de la plaque mesuré avant et après l'enlèvement de lamelle.

$\varepsilon_{0inf.}$  et  $\varepsilon_{inf.}$  : Déformation de la fibre inférieure avant et après l'enlèvement de lamelle.

$\varepsilon_{0sup.}$  et  $\varepsilon_{sup.}$  : Déformation de la fibre supérieure avant et après l'enlèvement de lamelle.

$b$  : Déformation de la fibre inférieure (en  $y = 0$ ) liée à l'enlèvement de lamelle.

Les équations d'équilibre de la plaque deviennent :

L'équation de l'effort normal par unité d'épaisseur :

$$\int_0^h E(y)(\varepsilon_0(y) + a y + b) dy = 0$$

$$\int_0^{h_0} E(y)\varepsilon_0(y) dy - \int_h^{h_0} E(y)\varepsilon_0(y) dy + \int_0^h E(y)(a y + b - a y_m(h) + a y_m(h)) dy = 0$$

$$0 - \int_h^{h_0} \sigma_R(y) dy + \int_0^h E(y)a(y - y_m(h)) dy + \int_0^h E(y)(a y_m(h) + b) dy = 0$$

$$- \int_h^{h_0} \sigma_R(y) dy + 0 + (a y_m(h) + b) \langle E \rangle_h = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\left( y_m(h) \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) + b \right) \langle E \rangle_h = \int_h^{h_0} \sigma_R(y) dy}$$

Équation A. 6. 1

$\langle E \rangle_h$  est la moyenne d'  $E$  sur l'épaisseur  $h$  :  $\langle E \rangle_h = \int_0^h E(y) dy$

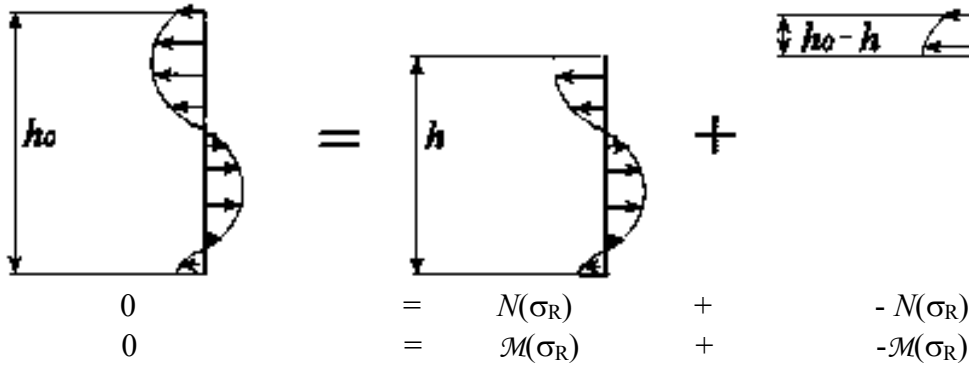


Figure A. 6. 2. : Schéma d'un principe de raisonnement possible : la variation de courbure est induite par le moment lié aux contraintes résiduelles dans la lamelle  $[h, h_0]$  sur la nouvelle poutre obtenue en enlevant de la matière.

L'équation du moment fléchissant par unité d'épaisseur :

$$\int_0^h E(y)(\varepsilon_0(y) + a y + b)(y - y_m(h)) dy = 0$$

$$\int_0^{h_0} E(y)\varepsilon_0(y)(y - y_m(h)) dy - \int_h^{h_0} E(y)\varepsilon_0(y)(y - y_m(h)) dy$$

$$+ \int_0^h E(y)(a y + b)(y - y_m(h)) dy = 0$$

Le premier terme de cette équation est nul. En effet :

$$\int_0^{h_0} E(y)\varepsilon_0(y)(y - y_m(h)) dy = \int_0^{h_0} E(y)\varepsilon_0(y)(y - y_m(h) + y_m(h_0) - y_m(h_0)) dy$$

$$= \int_0^{h_0} E(y)\varepsilon_0(y)(y - y_m(h_0)) dy + (y_m(h_0) - y_m(h)) \int_0^{h_0} E(y)\varepsilon_0(y) dy$$

$$= M_0 + (y_m(h_0) - y_m(h)) N_0 = 0 + 0 = 0$$

L'équation du moment devient donc :

$$\begin{aligned}
& -\int_h^{h_0} \sigma_R(y)(y - y_m(h)) dy + b \int_0^h E(y)(y - y_m(h)) dy \\
& \quad a \int_0^h E(y) y (y - y_m(h)) dy = 0 \\
& -\int_h^{h_0} \sigma_R(y)(y - y_m(h)) dy + b \times 0 + a \int_0^h E(y) y (y - y_m(h)) dy = 0 \\
& \boxed{-\int_h^{h_0} \sigma_R(y)(y - y_m(h)) dy + a \int_0^h E(y) y (y - y_m(h)) dy = 0}
\end{aligned}$$

Posons  $\boxed{\Psi(h) = \int_0^h E(y) y (y - y_m(h)) dy}$  de sorte que l'on identifie ici le correspondant du classique produit (moment quadratique x module d'Young) de la théorie des poutres à élasticité uniforme.

$$\boxed{a \Psi(h) = \int_h^{h_0} \sigma_R(y)(y - y_m(h)) dy} \quad \text{Équation A. 6. 2}$$

La valeur moyenne  $\langle E \rangle_h$ , entre 0 et h, du module  $E$  peut être mesurée par un essai de traction (mesure globale). En enlevant une couche de matière ou lamelle de hauteur  $(h_0 - h)$  finie, nous n'aurons accès qu'à une moyenne de la contrainte résiduelle dans cette lamelle. Par souci de simplicité, nous considérons que  $\sigma_R(y)$  est constante - et implicitement  $E(y)$  aussi - sur

l'épaisseur de la lamelle enlevée  $[h, h_0]$ , i. e.  $\sigma_R(y) = \sigma_R\left(\frac{h+h_0}{2}\right)$  pour  $y \in [h, h_0]$ .

$$\text{L'équation A. 6. 1. devient } \left( y_m(h) \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) + b \right) \langle E \rangle_h = \sigma_R \left( \frac{(h_0 + h)}{2} \right) (h_0 - h)$$

$$\text{L'équation A. 6. 2. devient } a \Psi(h) = \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \Psi(h) = \sigma_R \left( \frac{(h_0 + h)}{2} \right) (h_0 - h) \left( \frac{(h_0 + h)}{2} - y_m(h) \right)$$

Ceci valide dans le cas d'un module variable avec  $y$  le schéma de pensée classique de la Figure A. 6. 1. Pour continuer le calcul, nous devons donc connaître  $E(y)$ . Avec les nouvelles technologies de micro et nanoindentation nous pourrons bientôt mesurer le module  $E$  après l'enlèvement de chaque lamelle. L'évolution d' $E$  avec l'épaisseur donnée par ces mesures de nanoindentation plus la valeur moyenne d' $E$  mesurée par un essai de traction permettent de remonter à la fonction  $E(y)$  et de calculer la contrainte résiduelle par les précédentes équations A. 6. 1. et A. 6. 2.

#### **A6. 4 Cas "classique" du module d'Young uniforme**

Dans le cas où  $E(y)$  est constant par rapport  $y$  alors on retrouve bien la formule de Stoney :

$$y_m(h) = \frac{\int_0^h y E(y) dy}{\int_0^h E(y) dy} = \frac{E \frac{h^2}{2}}{E h} = \frac{h}{2}$$

L'équation A. 6. 2. devient  $\sigma_R \left( \frac{(h_0 + h)}{2} \right) (h_0 - h) \frac{h_0}{2} = aE h^3 / 12$

$$\Rightarrow \sigma_R \left( \frac{(h_0 + h)}{2} \right) = \frac{aE h^3}{6(h_0 - h)h_0} = \frac{E h^2}{6(h_0 - h)} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)$$

### ***A6. 5 Moyenne du module d'Young mesuré par essai de flexion***

Si l'on cherche à mesurer le module moyen par flexion,  $\langle E \rangle_{(l, h)}$ , on retrouve la formule de  $\psi(h)$  et  $\langle E \rangle_{(l, h)} = \psi(h)/I_h$  où  $I_h = \int_0^h y(y - y_m(h)) dy$ . La moyenne a donc un sens différent de celle

mesurée en traction uniaxiale notée  $\langle E \rangle_h$  qui vaut  $\frac{1}{h} \int_0^h E(y) dy$ .

### ***A6. 6 Contrainte résiduelle éventuellement additionnelle liée à l'enlèvement de lamelle***

En pratique on peut enlever des couches par fraisage. Le fraisage induit un traitement thermique en surface. En effet, l'usinage ou la coupe perturbe l'état de contraintes résiduelles sur une faible épaisseur en surface. Si cela n'est pas négligeable, il convient alors de considérer qu'une couche surfacique est perturbée par le fraisage avec ses propres contraintes résiduelles et module. Cependant, nous avons fait l'hypothèse que l'enlèvement d'une lamelle ne perturbe pas la distribution des contraintes résiduelles dans le reste de la plaque. Introduisons cette perturbation  $P_u$  en faisant l'hypothèse qu'elle est constante, concentrée en  $y = h$  (donc  $P_u$  s'exprime en N/m et  $\sigma_R$  en N/m<sup>2</sup>), et vient se superposer à  $\sigma_R$ . L'équation A. 6. 2. devient :

$$a \Psi(h) = \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \Psi(h) = \sigma_R \left( \frac{(h_0 + h)}{2} \right) (h_0 - h) \left( \frac{(h_0 + h)}{2} - y_m(h) \right) + P_u (h - y_m(h))$$

Si cette perturbation est considérable alors il conviendra de corriger les rayons de courbure. S'il est possible d'effectuer un traitement thermique permettant de relaxer les contraintes internes alors  $P_u$  peut-être estimé. Afin de vérifier que cette perturbation est bien considérable, on peut, par exemple, proposer d'enlever des lamelles après traitement thermique. Dans un premier temps, si des lamelles sont enlevées en fibres supérieure et inférieure de façons non symétriques alors une perturbation  $P_u$  considérable entraînera des courbures de la plaque et il conviendra de se soucier de prendre en considération  $P_u$ . Dans le cas contraire, il semblera inutile de se préoccuper de cette perturbation. Si  $P_u$  est considérable, elle sera mesurée par enlèvements successifs de lamelles à l'aide des équations précédentes. Bien sûr, il conviendra de vérifier que le traitement thermique ne modifie pas de façon conséquente le module d'élasticité local du matériau.

### ***A6. 7 Références bibliographiques de cette annexe***

- M. Alchikh, C. Fond, Y. Frere et H. Pelletier, "Mechanochemical degradation of poly (vinyl fluoride) by Sodium Hydroxide measured by Microindentation", Journal of Materials Science, (2010), **45**, p. 2311-2316.
- M. Alchikh, C. Fond et Y. Frere, "Discontinuous crack growth in poly (vinyl fluoride) by mechanochemical ageing in Sodium Hydroxide", Polymer Degradation and Stability, (2010), **95**, p. 440-444.
- Mohamad Alchikh, "Effet du vieillissement chimique dans la soude sur le comportement mécanique du PVDF", thèse de l'Université de Strasbourg, soutenue le 26 mars 2009.

- Laroze, S., 1988, Mécanique des structures - Tome 2 : Théorie des poutres, 2 éd., Eyrolles/Masson.
- Stoney, G. G., 1909, The tension of metallic films deposited by electrolysis: Proc. Roy. Soc., v. A82, p. 172.