

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS  
SOLIDES DÉFORMABLES ÉLASTIQUES ISOTROPES  
*petites perturbations*

Christophe Fond  
*Université de Strasbourg*  
*Christophe.Fond@unistra.fr*

---

**Résumé**

Mécanique des milieux continus, petites déformations, contrainte, équilibre, élasticité linéaire.

*Mots clefs:* mécanique, milieu continu, solide, déformation, contrainte, équilibre, loi de comportement

---

**Table des matières**

<b>1</b>	<b>Préambule</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
2.1	Contexte . . . . .	3
2.2	Échelles . . . . .	3
2.3	Points de vue pour fluides et solides . . . . .	3
2.4	Cas particulier de la fissuration . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Déformations</b>	<b>4</b>
3.1	A propos des déplacements et des déformations . . . . .	4
3.2	Champs cinématiquement admissibles . . . . .	5
3.3	Cinématique en vision Lagrangienne : vecteur déplacement d'un point matériel . . . . .	5
3.4	Transformation . . . . .	6
3.5	Gradient de la transformation et déformation . . . . .	7
3.6	Allongement et raccourcissement . . . . .	8
3.7	Distorsion . . . . .	8
3.8	Tenseur des déformations . . . . .	9
3.9	Repère principal . . . . .	9

<b>4</b>	<b>Contraintes</b>	<b>10</b>
4.1	Tenseur des contraintes et vecteur contrainte . . . . .	10
4.2	Principe de l'équilibre . . . . .	11
4.3	Réciprocité des contraintes tangentielles . . . . .	12
4.4	Repère principal . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Théorème des puissances virtuelles (T. P. V.)</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>Loi de comportement, cas de l'élasticité linéaire isotrope</b>	<b>13</b>
6.1	Relation contraintes - déformations . . . . .	13
6.2	Relation entre les paramètres matériaux - élasticité isotrope .	13
<b>Annexe A</b>	<b>Un peu de géométrie sur une facette inclinée</b>	<b>14</b>
Annexe A.1	Un tétraèdre calé dans le coin $(O,x,y,z)$ . . . . .	14
Annexe A.2	Surface d'une facette inclinée . . . . .	14
Annexe A.3	Normale sortante d'une facette inclinée . . . . .	15
<b>Annexe B</b>	<b>Mesure de la déformation</b>	<b>15</b>
Annexe B.1	Variation de volume et déterminant d'une matrice jacobienne . . . . .	15
Annexe B.1.1	Produit mixte . . . . .	15
Annexe B.1.2	Variation de volume . . . . .	15
<b>Annexe C</b>	<b>Démonstration du T. P. V. par le principe de l'équilibre</b>	<b>16</b>
Annexe C.1	Principe fondamental de l'équilibre . . . . .	16
Annexe C.2	Puissances virtuelles et travaux virtuels . . . . .	17
Annexe C.3	Vers les grandes déformations, transformations finies	20
Annexe C.4	Variation de longueur . . . . .	21
Annexe C.4.1	Transformations finies . . . . .	21
Annexe C.5	Formalisme du "deuxième gradient" . . . . .	21

## 1. Préambule

Ce cours résume des aspects importants de la M. M. C. Il est plus axé sur la pédagogie que sur la rigueur démonstrative, bien que la pédagogie nécessite fort probablement beaucoup de rigueur mais il convient de faire un compromis convenable. Il est recommandé de se reporter à des ouvrages plus complets pour approfondir des notions [2] [3] [4].

## 2. Introduction

### 2.1. Contexte

A l'exception d'objets tels que extincteurs, airbags, pots de yaourts, etc, la plupart du temps, on souhaite pouvoir utiliser plusieurs fois les objets manufacturées. Hormis des matériaux tels que le bois ou certains composites, la plupart des matériaux peuvent être considérés comme ayant des propriétés isotropes. Ce cours introductif se limitera donc aux problèmes liées à l'élasticité linéaire isotrope. Par ailleurs, sauf pour les matériaux tels que caoutchoucs, élastomères ou tissus biologiques, la limite élastique est généralement atteinte en petites déformations. Ce cours introductif concernant les milieux solides déformables sera limité à l'élasticité linéaire isotrope et au cadre des petites perturbations (**h. p. p.**), i. e. petites déformations et petits déplacements. Cette dernière limitations écarte les non linéarités d'origine géométrique sur le plan structurel telles que flambement, voilement, cloquage, froissement, etc. Dans le cadre des h. p. p., on pourra assimiler l'état initial à l'état déformé et utiliser le théorème de **superposition**<sup>1</sup>.

### 2.2. Échelles

A l'échelle des atomes ou des molécules, on ne peut pas considérer la matière comme un milieu continu. A la échelle du mètre, on ne peut pas considérer tous les atomes et toutes les molécules. Lorsqu'on franchit typiquement l'échelle du micron, il convient d'avoir une vision continue de la matière en considérant son comportement moyen. L'agitation thermique n'apparaît plus directement à cette échelle.

### 2.3. Points de vue pour fluides et solides

Du point de vue de l'intuition des phénomènes, processus et mécanismes physiques, il faut considérer que deux particules de matière voisines à un instant  $t$  le seront toujours à un autre instant  $t'$  dans un solide alors que ce n'est pas le cas pour un fluide. Du point de vue de la M. M. C, les fluides seront généralement vus en formulation eulérienne - on considère un

---

1. L'effet d'une sollicitation est proportionnel à la sollicitation. L'effet de la somme des sollicitations est égal à la somme des effets des sollicitations.

point immobile de l'espace - et les solides en formulation lagrangienne - on considère un point mobile avec la matière, i. e. un point matériel. Ces points de vues sont respectivement plus commodes pour suivre les mouvements de matière.

#### 2.4. Cas particulier de la fissuration

Lorsque qu'une fissure se propage dans un milieu, certains points matériels initialement voisins peuvent s'éloigner d'une distance "infiniment grande", relativement à la distance qui les sépare initialement, pour ne plus être voisins. De plus, le sommet de fissure présente une singularité géométrique. Pour la caractérisation de la ténacité des matériaux ou la résistance à la rupture, la lecture de [1] est conseillée afin de s'initier aux notions de la mécanique de la rupture et ses formalismes.

### 3. Déformations

#### 3.1. A propos des déplacements et des déformations

Tous les matériaux se déforment sous sollicitation mécanique même si cela n'est pas toujours visible à l'œil nu. Il s'agit de détecter dans les mouvements de la matière ce qui ne résulte pas d'une translation de solide rigide ni d'une rotation de solide rigide. On utilise ici "rigide" au sens de "non déformé". On cherchera donc à évaluer l'évolution du déplacement des points matériels lorsque l'on passe d'un point matériel à un autre. S'il n'y a pas d'évolution, il s'agit au plus d'une translation de solide rigide. S'il y a une évolution, il faudra déduire une éventuelle rotation de solide rigide pour obtenir enfin la sollicitation mécanique.

Si la structure a considérablement bougé par rapport à ses conditions aux limites initiales et la position initiales des forces extérieures, alors le déplacement de la matière doit aussi être considéré. En effet, on ne peut pas assimiler la configuration géométrique initiale à la configuration géométrique à l'état déformé dans ce cas. On parle alors de *grands déplacements*.

On ne peut pas non plus assimiler la configuration géométrique initiale à la configuration géométrique à l'état déformé si les surfaces sur lesquelles s'appliquent les efforts ont considérablement varié. L'équilibre décrit par  $\overrightarrow{div}(\underline{\sigma}) = \overrightarrow{0}$  est écrit dans l'état déformé en contraintes vraies ou contraintes dites de Cauchy. On parle alors de *grandes déformations*.

Enfin, la mesure du comportement mécanique d'un matériau en présence de grandes rotations de matière est un point délicat qui nécessite un approfondissement dont on ne trouvera ici qu'un point d'entrée délimitant la frontière du domaine de validité des h. p. p.. Pour l'essentiel, dans ces cas difficiles et souvent discutés, il conviendra d'utiliser une métrique non approximative et de considérer les problèmes d'objectivité<sup>2</sup>. Les descripteurs

---

2. Indépendance au repère choisi.

choisis doivent être les mêmes pour la mesure et pour la modélisation.

### 3.2. Champs cinématiquement admissibles

Nous ne considérerons que des champs de déplacements dits "cinématiquement admissibles", i. e. tels que la densité de la matière ne tende ni vers 0 ni vers l' $\infty$ . En particulier, il n'y a pas apparition ex nihilo de cavité ou fissure. En outre, les déplacements respectent les conditions "aux limites" imposées.

### 3.3. Cinématique en vision Lagrangienne : vecteur déplacement d'un point matériel

On considère comme référentiel un repère orthonormé  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  dans un espace euclidien.  $[x, y, z]$  sont les variables de Lagrange.

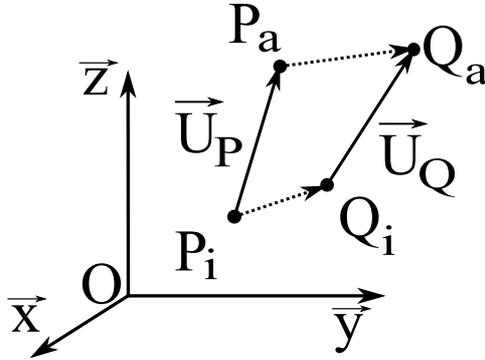
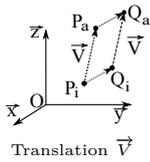


FIGURE 1: Déplacements  $U_P$  et  $U_Q$  de deux points matériels infiniment proches respectivement P et Q.

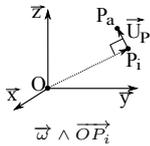
Considérons un point dont la position initiale est  $P_i = [x_{p_i}, y_{p_i}, z_{p_i}]$  et dont la position actuelle est  $P_a = [x_{p_a}, y_{p_a}, z_{p_a}]$ , O étant l'origine du repère. Le vecteur déplacement est donné par :

$$\overrightarrow{P_i P_a} = \overrightarrow{P_i O} + \overrightarrow{O P_a} = \overrightarrow{O P_a} - \overrightarrow{O P_i} = [x_{P_a} - x_{P_i}, y_{P_a} - y_{P_i}, z_{P_a} - z_{P_i}] \quad (1)$$

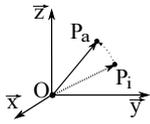
Il convient de dissocier la déformation du mouvement de solide rigide. Il s'agit donc de faire la décomposition du mouvement de solide rigide et déformation.



Translation  $\vec{V}$



$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP_i}$



Opérateur R

### Translation de solide rigide

Une translation sera obtenue en additionnant le vecteur translation  $\vec{V} = [v_x, v_y, v_z]$  de sorte que  $\overrightarrow{OP_a} = \overrightarrow{OP_i} + \vec{V}$ . Ceci revient en terme de déplacement à  $\overrightarrow{P_iP_a} = \vec{V}$ .  $\vec{V}$  est indépendant de la position spatiale du point P, i. e. indépendant de  $[x, y, z]$ .

### Rotation de solide rigide

Une rotation d'axe  $\vec{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$  induira un déplacement  $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP_i}$  du point  $P_i$  de sorte que  $\overrightarrow{OP_a} = \overrightarrow{OP_i} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP_i}$ . Ceci revient à écrire  $\overrightarrow{U_P} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP_i} = [\omega_2 z - \omega_3 y, \omega_3 x - \omega_1 z, \omega_1 y - \omega_2 x]$ . Au lieu d'utiliser le pseudo-vecteur  $\vec{\omega}$  peut aussi mettre cet opérateur géométrique sous forme de matrice et l'on obtient :

$$\overrightarrow{U_P} = \overrightarrow{P_iP_a} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP_i} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{\underline{\Omega}} \cdot \overrightarrow{OP_i} \quad (2)$$

### Matrice de rotation

Il convient de ne pas confondre avec une matrice de rotation d'axe défini par un vecteur unitaire  $[n_1, n_2, n_3]$ , i. e.  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ , qui s'exprime par  $\underline{\underline{R}} =$

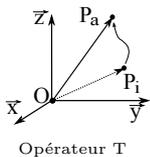
$$\begin{bmatrix} n_1^2 + \cos(\theta)(1 - n_1^2) & n_1 n_2(1 - \cos(\theta)) - n_3 \sin(\theta) & n_1 n_3(1 - \cos(\theta)) + n_2 \sin(\theta) \\ n_1 n_2(1 - \cos(\theta)) + n_3 \sin(\theta) & n_2^2 + \cos(\theta)(1 - n_2^2) & n_2 n_3(1 - \cos(\theta)) - n_1 \sin(\theta) \\ n_1 n_3(1 - \cos(\theta)) - n_2 \sin(\theta) & n_2 n_3(1 - \cos(\theta)) + n_1 \sin(\theta) & n_3^2 + \cos(\theta)(1 - n_3^2) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Il faut remarquer que  $\underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{Id}}$ , où  $T$  désigne la transposée et  $\underline{\underline{Id}}$  la matrice identité.

La déformation peut être le résultat de l'évolution du vecteur déplacement d'un point à un point voisin. Une rotation de solide rigide induit aussi une évolution qu'il faudra soustraire. Une translation de solide rigide n'induit pas de translation et le calcul du gradient de déplacement l'élimine naturellement.

### 3.4. Transformation

Le mouvement du point matériel P est le résultat de la transformation  $\mathfrak{T}$  de sorte que  $\overrightarrow{OP_a} = \mathfrak{T}(\overrightarrow{OP_i})$  ou encore :



Opérateur T

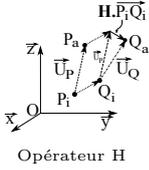
$$\mathfrak{T} \left( \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} \quad (4)$$

L'indice  $a$  désigne la position actuelle et l'indice  $i$  la position initiale. Toute transformation peut être décomposée en une translation de solide rigide définie par le vecteur  $\vec{V}$ , une rotation de solide rigide définie par une matrice  $\underline{R}$  et une déformation de solide souple définie par une transformation  $\mathfrak{T}$ . On suppose que la transformation  $\mathfrak{T}$  est continue et dérivable. Par exemple, selon que la rotation est effectuée avant ou après déformation et de toutes façons après la translation on peut la décomposer différemment, i. e.  $\vec{\mathfrak{T}}(\overrightarrow{OP_i}) = \mathfrak{T}'(\underline{R}, \overrightarrow{OP_i}) + \vec{V} = \underline{R} \cdot \mathfrak{T}''(\overrightarrow{OP_i}) + \vec{V}$ . Il y aura donc différentes possibilités de considérer une transformation. Les deux classiques sont que l'on effectue d'abord le mouvement de solide rigide puis la déformation et son inverse. On peut aussi passer par des situations intermédiaires de référence si cela s'avère commode.

### 3.5. Gradient de la transformation et déformation

Nous noterons désormais le vecteur déplacement  $\overrightarrow{P_i P_a} = \overrightarrow{U_P}$ , i. e.  $\overrightarrow{U_P} = [u_P, v_P, w_P] = [x_{P_a} - x_{P_i}, y_{P_a} - y_{P_i}, z_{P_a} - z_{P_i}]$ . De même  $\overrightarrow{Q_i Q_a} = \overrightarrow{U_Q}$ . Si ce vecteur déplacement évolue dans l'espace alors il peut s'agir d'une rotation et/ou d'une déformation. Il faut donc calculer l'évolution de ce vecteur

Regardons maintenant comment on peut écrire l'évolution du vecteur déplacement, par exemple  $\overrightarrow{U_P}$  qui évolue vers  $\overrightarrow{U_Q}$ . Q est proche de P donc on peut écrire que  $x_{Q_i} = x_{P_i} + dx$ ,  $y_{Q_i} = y_{P_i} + dy$ ,  $z_{Q_i} = z_{P_i} + dz$ . Il vient :



$$u(x_{P_i} + dx, y_{P_i} + dy, z_{P_i} + dz) = u(x_{P_i}, y_{P_i}, z_{P_i}) + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$v(x_{P_i} + dx, y_{P_i} + dy, z_{P_i} + dz) = v(x_{P_i}, y_{P_i}, z_{P_i}) + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$w(x_{P_i} + dx, y_{P_i} + dy, z_{P_i} + dz) = w(x_{P_i}, y_{P_i}, z_{P_i}) + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

$$\iff \overrightarrow{U_Q} = \overrightarrow{U_P} + \underline{H} \overrightarrow{P_i Q_i} \iff \overrightarrow{Q_i Q_a} = \overrightarrow{P_i P_a} + \underline{H} \overrightarrow{P_i Q_i} \quad (5)$$

Nous venons d'introduire l'opérateur gradient d'un vecteur qui donne un tenseur d'ordre deux à partir d'un vecteur.

$$\underline{H} = \underline{\underline{grad}} \overrightarrow{U}_P = \underline{\underline{grad}}(\overrightarrow{P_i P_a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}_P \quad (6)$$

Variation selon l'axe x : prenons un voisin R de P comme étant situé de sorte que  $x_{R_i} = x_{P_i} + \delta$ ,  $y_{R_i} = y_{P_i}$ ,  $z_{R_i} = z_{P_i}$ . En d'autres termes on passe de P à Q en parcourant une très petite distance  $\delta$  selon l'axe x. Les variations se déduisent donc de :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{R \rightarrow P} \frac{x_{R_a} - x_{R_i} - (x_{P_a} - x_{P_i})}{x_{R_i} - x_{P_i}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{x_{R_a} - x_{P_a} - \delta}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{x_{R_a} - x_{P_a}}{\delta} - 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \lim_{R \rightarrow P} \frac{y_{R_a} - y_{R_i} - (y_{P_a} - y_{P_i})}{x_{R_i} - x_{P_i}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{y_{R_a} - y_{P_a} - (y_{R_i} - y_{P_i})}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{y_{R_a} - y_{P_a}}{\delta} - 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \lim_{R \rightarrow P} \frac{z_{R_a} - z_{R_i} - (z_{P_a} - z_{P_i})}{x_{R_i} - x_{P_i}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{z_{R_a} - z_{P_a} - (z_{R_i} - z_{P_i})}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{z_{R_a} - z_{P_a}}{\delta} - 0$$

### 3.6. Allongement et raccourcissement

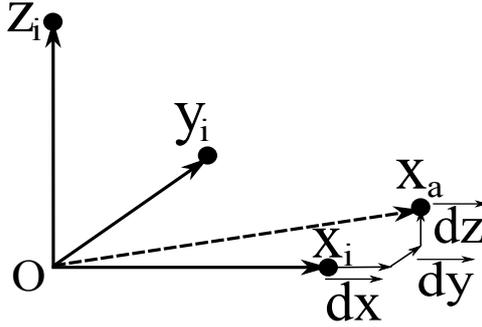


FIGURE 2: Transformation d'un segment très petit initialement aligné sur l'axe  $x$ .

Plaçons  $P$  sur l'axe  $\vec{x}$  à une très petite distance  $dx$  de  $O$  et comparons  $\|\vec{OP}_i\|$  et  $\|\vec{OP}_a\|$ . La distance initiale entre  $O$  et  $P$  vaut longueur  $dx$ . La distance actuelle entre  $O$  et  $P$  vaut  $dx + \Delta = \sqrt{(dx + \frac{\partial u}{\partial x})^2 + \frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial x}}$ . Calculons l'allongement ou raccourcissement relatif :

$$\frac{\Delta}{dx} = \frac{\sqrt{dx^2 + 2dx\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial x}} - dx}{dx} \quad (7)$$

Si  $\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} \ll 1$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x} \ll 1$ , alors on peut raisonnablement faire l'approximation suivante :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta}{dx} \approx \sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial x}} - 1 \approx \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8)$$

IL conviendra donc de vérifier que tous les termes du tenseur  $\underline{H}$  sont petits devant 1 pour pouvoir utiliser cette mesure de la déformation,, typiquement inférieurs à 15%.

### 3.7. Distorsion

La distorsion est la variation d'angle entre deux petits segments initialement disposés à  $90^\circ$ . On passe de  $\pi/2$  à  $\pi/2 - \gamma$  où  $\gamma$  est appelé distorsion. Le calcul de cet angle à l'aide du produit scalaire donne :

$$\gamma_{xz} = \text{Arcsin}\left(\frac{\vec{Ox}_a \cdot \vec{Oz}_a}{\|\vec{Ox}_a\| \|\vec{Oz}_a\|}\right) \quad (9)$$

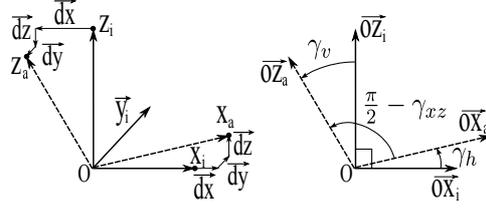


FIGURE 3: Variation d'angle entre deux petits segments initialement perpendiculaires induite par une déformation appelée distorsion.

Calculons cet angle dans le cadre des petites déformations de sorte que nous restons approximativement dans même le plan. Remarquons déjà que si  $\gamma_h = \gamma_v$  il s'agit d'une rotation de solide rigide. Nous obtiendrons donc  $\gamma_{xz} = \gamma_h - \gamma_v$ . Calculons  $\gamma_v$  et  $\gamma_h$  en première approximation :

$$\gamma_h \approx \tan\left(\frac{\partial w}{\partial x} dx\right) \approx \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{et} \quad \gamma_v \approx \tan\left(-\frac{\partial u}{\partial z} dz\right) \approx -\frac{\partial u}{\partial z}$$

Il vient donc

$$\gamma_{xz} \approx \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Notons que  $\epsilon_{xz} \equiv \frac{1}{2}\gamma_{xz}$  par définition.

### 3.8. Tenseur des déformations

Pour que nous puissions utiliser la même formule quel que soit le système de coordonnées choisies, cartésiennes, cylindriques ou sphériques, il convient de synthétiser et réécrire en utilisant les opérateurs vectoriels. Nous obtenons donc pour le tenseur des déformations :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} \{ \underline{\underline{grad}} \vec{U}_P + (\underline{\underline{grad}} \vec{U}_P)^T \} \quad (10)$$

où  $^T$  désigne la transposée d'une matrice. Ainsi construit, le tenseur des déformations  $\underline{\underline{\epsilon}}$  est symétrique.

Des points d'entrée pour une suite de l'étude des déformations se situent en Annexe C.3 et Annexe C.5.

### 3.9. Repère principal

Étant donné que le tenseur  $\underline{\underline{\epsilon}}$  est symétrique<sup>3</sup>, il existe toujours un repère dans lequel il prend une forme diagonale.

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}_{(x_{princ}, y_{princ}, z_{princ})} \quad \epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3 \quad (11)$$

3. le tenseur des déformations est symétrique par construction alors que celui des contraintes l'est par raison d'équilibre, i. e. réciprocité des contraintes tangentielles.

## 4. Contraintes

### 4.1. Tenseur des contraintes et vecteur contrainte

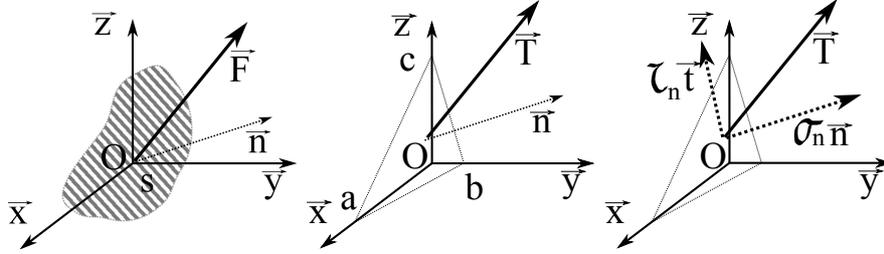


FIGURE 4: (gauche) Force associée à une petite surface définie par une normale sortante  $\vec{n}$ . (milieu) Vecteur contrainte  $\vec{T}$  associé à  $\vec{n}$ . (droite) Contrainte normale  $\sigma_n$  et tangentielle  $\tau_n$ .

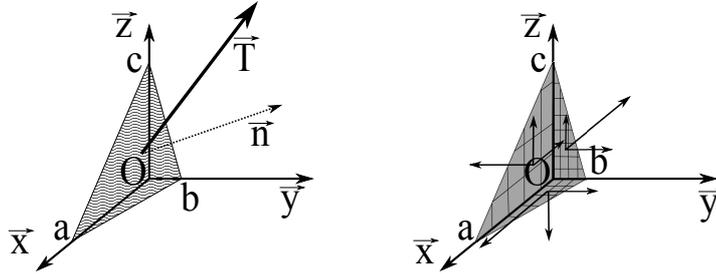


FIGURE 5: équilibre d'une surface orientée aboutissant à  $\vec{T} = \underline{\underline{\sigma}} \vec{n}$ .

Si l'on procède à l'équilibre d'un élément de volume pour lequel on connaît les contraintes sur les facettes  $(0,a,c)$  du plan  $(\vec{x}, \vec{z})$ ,  $(0,b,c)$  du plan  $(\vec{y}, \vec{z})$  et  $(0,a,b)$  du plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ , alors le vecteur contrainte  $\vec{T}$  sur la facette définie par  $\vec{n}$  doit être tel que la somme des forces sur l'élément de volume est nulle.

$$T_x S - \sigma_{xx} bc/2 - \sigma_{xy} ab/2 - \sigma_{xz} ac/2 = 0$$

$$T_y S - \sigma_{xy} ab/2 - \sigma_{yy} ac/2 - \sigma_{yz} bc/2 = 0$$

$$T_z S - \sigma_{xz} ac/2 - \sigma_{yz} bc/2 - \sigma_{zz} ab/2 = 0$$

Avec un peu de géométrie (voir en Annexe A), on peut assez facilement montrer que la surface de la facette inclinée vaut  $S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + c^2 b^2}$ .

On fait ensuite apparaître les composantes de la normale  $\vec{T}$  à la facette qui valent  $n_x = \frac{bc}{2S}$ ,  $n_y = \frac{ac}{2S}$  et  $n_z = \frac{ab}{2S}$ . Cela se traduit finalement par :

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (12)$$

Sur la Fig. 5, la somme des forces résultant des contraintes sur les trois facettes hachurées équilibrent celles sur la facette avec motif ondulé.

#### 4.2. Principe de l'équilibre

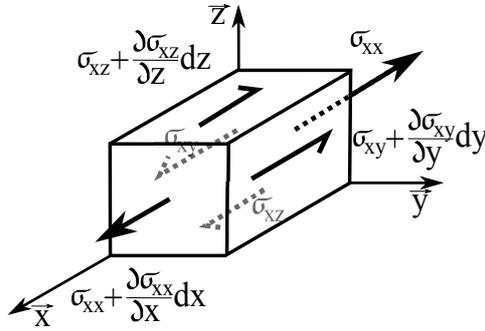


FIGURE 6: équilibre des contraintes.

Le principe de l'équilibre postule que la somme des forces et des moments appliquées à tout domaine est nul. L'équilibre des moments est utilisé pour montrer que le tenseur des contraintes est symétrique en l'absence de source de couple locale. Pour un pavé volumique de très petite taille de dimensions  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ , l'équilibre des forces selon  $\vec{x}$  se traduit par la somme des composantes selon  $\vec{x}$  des forces agissant sur les 6 faces. Ces forces sont calculées connaissant les contraintes sur chaque face multipliées par les surfaces correspondantes. Cela donne :

$$\begin{aligned} & \sigma_{xx} dydz + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz - \sigma_{xx} dydz \\ & + \sigma_{xy} dx dz + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy dx dz - \sigma_{xy} dx dz \\ & + \sigma_{xz} dx dy + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz dx dy - \sigma_{xz} dx dy = 0 \end{aligned}$$

En simplifiant et en additionnant de même les composantes des forces selon  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ , on obtient des relations entre les évolutions des contraintes dans l'espace. Le principe de l'équilibre impose donc qu'en situation quasi-statique et en l'absence de force de volume :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} &= 0\end{aligned}\quad (13)$$

En présence d'une force de volume  $\vec{f}$  (par exemple pour la pesanteur  $f_x = 0, f_y = 0, f_z = -\rho g$ ) et d'une force inertielle définie par l'accélération  $\vec{\gamma}$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} + f_x - \rho\gamma_x &= 0 \\ \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z} + f_y - \rho\gamma_y &= 0 \\ \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + f_z - \rho\gamma_z &= 0\end{aligned}\quad (14)$$

#### 4.3. Réciprocité des contraintes tangentielles

On démontre aisément à l'aide de l'équilibre des moments pour tout élément de volume que les contraintes tangentielles sont symétriques, i. e.  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{xz} = \sigma_{zx}$  et  $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$ .

#### 4.4. Repère principal

Étant donné que le tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}$  est symétrique, il existe toujours un repère dans lequel il prend une forme diagonale, à l'instar de 3.9.

### 5. Théorème des puissances virtuelles (T. P. V.)

À tout instant  $t$ , pour tout système matériel à l'équilibre et pour tout champ de vitesses cinématiquement admissible, la puissance virtuelle des actions extérieures est égale à la puissance virtuelle des actions intérieures.

Remarques :

- l'équilibre est assuré par un champ de contraintes dit "statiquement admissible",
- le champ de vitesses "cinématiquement admissible" peut être virtuel,
- réciproquement, si l'on postule le principe des puissances virtuelles (P. P. V.), alors on démontrera le théorème fondamental de la dynamique (équ. 14),
- le théorème des travaux virtuels (T. T. V.) consiste en la réduction du (T. P. V.) au cas où le temps n'intervient pas (forces inertielles négligeables). On se reportera à Annexe C pour la démonstration du passage de l'équilibre aux puissances virtuelles.

## 6. Loi de comportement, cas de l'élasticité linéaire isotrope

### 6.1. Relation contraintes - déformations

En élasticité linéaire isotrope, on peut établir une relation entre les contraintes et les déformations à l'aide de deux paramètres matériaux indépendants. En général on choisit soit le couple module d'Young et coefficient de Poisson, respectivement  $E$  et  $\nu$ , soit le couple des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , soit le couple module de compressibilité et module de cisaillement, respectivement  $K$  et  $G$ . Ce dernier couple est celui qui dissocie variation de volume et distorsion ainsi que les énergies de déformations correspondantes. On remarque que  $\mu = G$ .

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 2\mu\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) & 2\mu\epsilon_{xy} & 2\mu\epsilon_{xz} \\ 2\mu\epsilon_{xy} & 2\mu\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) & 2\mu\epsilon_{yz} \\ 2\mu\epsilon_{xz} & 2\mu\epsilon_{yz} & 2\mu\epsilon_{zz} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}/E - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})/E & (1 + \nu)\sigma_{xy}/E & (1 + \nu)\sigma_{xz}/E \\ (1 + \nu)\sigma_{xy}/E & \sigma_{yy}/E - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})/E & (1 + \nu)\sigma_{yz}/E \\ (1 + \nu)\sigma_{xz}/E & (1 + \nu)\sigma_{yz}/E & \sigma_{zz}/E - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/E \end{bmatrix} \quad (16)$$

### 6.2. Relation entre les paramètres matériaux - élasticité isotrope

Deux paramètres matériau indépendants suffisent pour décrire un comportement élastique isotrope. Le choix dépend de la commodité d'usage.

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \\ G = \mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)} & K &= \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \\ \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} & \nu &= 0.5 - \frac{G}{2K + 2G/3} \end{aligned} \quad (17)$$

Le coefficient de Poisson ne peut pas dépasser 0.5. Les matériaux qui présentent un fort contraste de propriétés entre cisaillement et compressibilité sont dits quasi-incompressibles. C'est typiquement le cas des élastomères et caoutchoucs pour lesquels  $K \approx 10^3 G$  donc  $\nu \approx 0.499\dots$ . Toutefois ces matériaux demeurent très compressibles comparés aux métaux par exemple. Sous pression, ils ont tendance à se déformer comme des fluides, remplissant l'espace disponible par distorsions en variant très peu de volume.

## Annexe A. Un peu de géométrie sur une facette inclinée

Annexe A.1. Un tétraèdre calé dans le coin  $(O, x, y, z)$

On définit un triangle passant par les points  $a$ ,  $b$  et  $c$  distincts. On se place hors des cas particuliers où un de ces points correspondrait à l'origine du repère  $O$ , ces cas ayant des solutions évidentes. Les points sont définis par  $\vec{Oa} = [a, 0, 0]$ ,  $\vec{Ob} = [0, b, 0]$  et  $\vec{Oc} = [0, 0, c]$ . Comment est définie la normale unitaire sortante  $\vec{n} = [n_x, n_y, n_z]$  ?

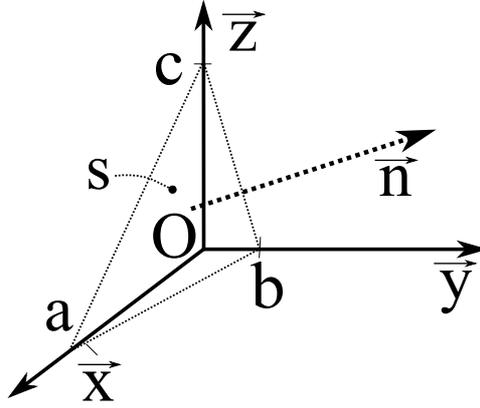


FIGURE A.7: Tétraèdre défini par les points  $a$  et  $b$  et  $c$ .

Annexe A.2. Surface d'une facette inclinée

Calculons la surface  $S$  du triangle  $(a, b, c)$  de la Fig. A.7. Pour cela, on peut procéder en considérant le point  $d$  sur le segment  $\vec{ab}$  sorte que  $(a, d, c)$  et  $(b, d, c)$  définissent deux triangles rectangles dont on sommera les surfaces. Il vient :

$$S = \frac{1}{2}(\|\vec{ad}\|\|\vec{dc}\| + \|\vec{db}\|\|\vec{dc}\|) = (\|\vec{ad}\| + \|\vec{db}\|)\frac{\|\vec{dc}\|}{2} = \frac{\|\vec{ab}\|\|\vec{dc}\|}{2}$$

$d$  est sur la droite qui porte  $a$  et  $b$  définie par  $x/a + y/b = 1$  et  $\vec{dc}$  est perpendiculaire à  $\vec{ab}$ . Notons que  $\vec{dc} = [d_x, d_y, c]$  et  $\vec{ab} = [-a, b, 0]$  d'où  $d_y = d_x a/b$ . Rappelons que  $a \neq 0, b \neq 0$  et  $c \neq 0$  puisqu'aucun de ces points n'est confondu avec l'origine  $O$  du repère. En reportant dans l'équation de la droite qui passe par  $a$  et  $b$ , il vient  $d_y b/a^2 + d_y/b = 1$  d'où :

$$\vec{Oa} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & b^2 \\ a^2 & b \\ 0 \end{bmatrix} \text{ puis } \vec{dc} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} -a & b^2 \\ -a^2 & b \\ c(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

d'où l'on déduit que  $\|\vec{dc}\|^2 = c^2 + a^2 b^2 / (a^2 + b^2)$  pour enfin obtenir :

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + c^2 b^2} \quad (\text{A.1})$$

*Annexe A.3. Normale sortante d'une facette inclinée*

On demande à  $\vec{n}$  d'être unitaire et perpendiculaire à  $\vec{ab}$ ,  $\vec{ac}$  et  $\vec{bc}$ . Comme  $\vec{bc} = \vec{ba} + \vec{ac}$ , il suffit que  $\vec{n}$  soit perpendiculaire à  $\vec{ba}$  et  $\vec{ac}$  et il le sera à  $\vec{bc}$ . La perpendicularité implique un produit scalaire nul, i. e.  $\vec{ab} \cdot \vec{n} = 0$ .  $\vec{ab} = [0 - a, b - 0, 0 - 0]$ . On doit donc vérifier  $-an_x + bn_y = 0$ . De même pour la perpendicularité avec  $\vec{ac}$ , on doit vérifier  $-an_x + cn_z = 0$ . Pour avoir un vecteur unitaire il faut aussi que  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ . Toutes ces conditions mènent à  $n_y = n_x a/b$ ,  $n_z = n_x a/c$ , puis :

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + c^2 b^2}} \begin{bmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

où l'on reconnaît la surface  $S$  calculée en Annexe A.3. On peut donc réécrire que :

$$n_x = \frac{bc}{2S}, \quad n_y = \frac{ac}{2S} \text{ et } n_z = \frac{ab}{2S} \quad (\text{A.3})$$

Si on considère que  $\overline{Oa} = dx$ ,  $\overline{Ob} = dy$  et  $\overline{Oc} = dz$ , on fait apparaître un des points clés de la démonstration de Annexe C.

**Annexe B. Mesure de la déformation**

*Annexe B.1. Variation de volume et déterminant d'une matrice jacobienne*

*Annexe B.1.1. Produit mixte*

Considérons trois vecteurs quelconques  $\overrightarrow{Ox_a}, \overrightarrow{Oy_a}, \overrightarrow{Oz_a}$ . Le volume  $V$  défini par le parallélépipède  $(O, x_a, y_a, z_a)$  est calculé par le produit mixte :

$$V(O, x_a, y_a, z_a) = (\overrightarrow{Ox_a} \wedge \overrightarrow{Oy_a}) \cdot \overrightarrow{Oz_a}. \quad (\text{B.1})$$

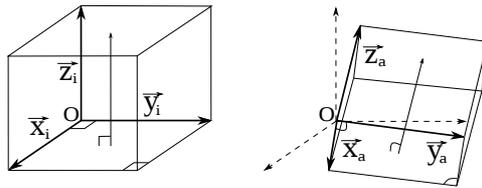


FIGURE B.8: Calcul du volume d'un parallélépipède par le produit mixte.

*Annexe B.1.2. Variation de volume*

Considérons maintenant une matrice  $\underline{\underline{F}}$  qui transforme les vecteurs  $\overrightarrow{OP_i}$  en  $\overrightarrow{OP'_a}$ .

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_a}{\partial x_i} & \frac{\partial x_a}{\partial y_i} & \frac{\partial x_a}{\partial z_i} \\ \frac{\partial y_a}{\partial x_i} & \frac{\partial y_a}{\partial y_i} & \frac{\partial y_a}{\partial z_i} \\ \frac{\partial z_a}{\partial x_i} & \frac{\partial z_a}{\partial y_i} & \frac{\partial z_a}{\partial z_i} \end{bmatrix}$$

On a donc pour  $\overrightarrow{Ox_i} = [x_i, 0, 0]$  :

$$\overrightarrow{Ox_a} = \underline{\underline{F}}\overrightarrow{Ox_i} = x_i \begin{bmatrix} \frac{\partial x_a}{\partial x_i} \\ \frac{\partial y_a}{\partial x_i} \\ \frac{\partial z_a}{\partial x_i} \end{bmatrix} = x_i \begin{bmatrix} F_{xx} \\ F_{yx} \\ F_{zx} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

On peut considérer de même  $\overrightarrow{Oy_i} = [0, y_i, 0]$  et  $\overrightarrow{Oz_i} = [0, 0, z_i]$ . Si maintenant on pose  $x_i = y_i = z_i = 1$ , alors le volume initial  $V_i$  de référence défini par  $[1, 1, 1]$  dans un repère orthonormé vaut 1. Ce volume unitaire est transformé par  $\underline{\underline{F}}$  en un volume actuel  $V_a$  parallélépipédique défini par les trois vecteurs  $[F_{xx}, F_{yx}, F_{zx}]$ ,  $[F_{xy}, F_{yy}, F_{zy}]$  et  $[F_{xz}, F_{yz}, F_{zz}]$  qui sont respectivement les transformées de  $[1, 0, 0]$ ,  $[0, 1, 0]$  et  $[0, 0, 1]$  par  $\underline{\underline{F}}$ . Calculons ce volume actuel à l'aide du produit mixte :

$$\begin{aligned} V(O, x_a, y_a, z_a)_{x_i=1, y_i=1, z_i=1} &= ([F_{xx}, F_{yx}, F_{zx}] \wedge [F_{xy}, F_{yy}, F_{zy}]) \cdot [F_{xz}, F_{yz}, F_{zz}] \\ &= F_{xz}F_{yx}F_{zy} - F_{xz}F_{zx}F_{yy} + F_{yz}F_{zx}F_{xy} - F_{yz}F_{xx}F_{zy} + F_{zz}F_{xx}F_{yy} - F_{zz}F_{yx}F_{xy} \\ &= \det \underline{\underline{F}} = \frac{V_a}{V_i} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

où  $V_i$  désigne le volume initial et  $V_a$  désigne le volume actuel. Il est donc clair que physiquement il faut vérifier  $\det \underline{\underline{F}} > 0$ .

## Annexe C. Démonstration du T. P. V. par le principe de l'équilibre

### Annexe C.1. Principe fondamental de l'équilibre

L'équilibre peut être dit "dynamique" ou "statique" selon que, respectivement, l'on considère les effets inertiels ou non. Les équations écrites en "dynamique" sont toujours valables. On en tire celles de la "statique" en négligeant les termes inertiels.

#### Principe fondamental de l'équilibre dynamique

$$\overrightarrow{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f} - \rho \vec{\gamma} = \vec{0} \quad (\text{C.1})$$

Notons que l'équilibre des moments y est traduit par la symétrie du tenseur des contraintes. En statique on néglige le terme d'accélération pour obtenir le :

#### Principe fondamental de l'équilibre statique

$$\overrightarrow{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f} = \vec{0} \quad (\text{C.2})$$

En absence de force volumique (pesanteur négligeable, ...), on simplifie encore l'équation pour obtenir  $\overrightarrow{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} = \vec{0}$ . On parlera de puissances en dynamique et de travaux en statique.

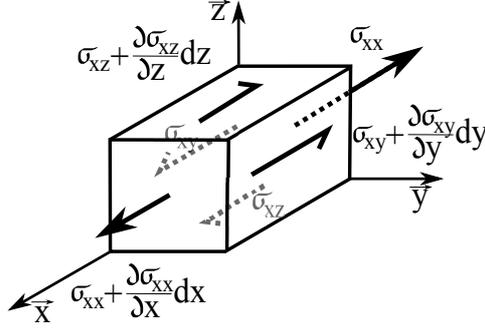


FIGURE C.9: Équilibre des contraintes selon l'axe x.

### Annexe C.2. Puissances virtuelles et travaux virtuels

Postulant le principe l'équilibre en tout point matériel qui est exprimé par l'équ. C.1, on peut faire le produit scalaire de  $\vec{0}$  avec n'importe quel vecteur vitesse  $\vec{C}^*$  et intégrer sur un volume, on obtiendra toujours une valeur scalaire nulle. Cette valeur correspond à une puissance, produit scalaire d'une force et d'une vitesse. On considère que  $\underline{\sigma}$  est symétrique (presque toujours sauf cas très particulier de couplage mécano-magnétique) :

$$\int \int \int_{\Omega} \{(\overline{\text{div}} \underline{\sigma} + \vec{f} - \rho \vec{\gamma}) \cdot \vec{C}^*\} d\Omega = 0 \quad (\text{C.3})$$

En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) C_x^* \right. \\ & \quad + \left( \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) C_y^* \\ & \quad \left. + \left( \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) C_z^* \right\} dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

On peut réécrire :

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} C_x^* + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} C_y^* + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} C_z^* + \left( f_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) C_x^* \right. \\ & \quad + \left\{ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} C_x^* + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} C_y^* + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} C_z^* + \left( f_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) C_y^* \right. \\ & \quad \left. \left. + \left\{ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} C_x^* + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} C_y^* + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} C_z^* + \left( f_z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) C_z^* \right\} \right\} dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

Si  $\vec{C}^*$  est dérivable, en intégrant par partie on obtient :

$$\int \int \int_{\Omega} \left\{ \left( f_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) C_x^* + \left( f_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) C_y^* + \left( f_z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) C_z^* \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial(\sigma_{xx}C_x^*)}{\partial x} - \sigma_{xx} \frac{\partial C_x^*}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{xy}C_y^*)}{\partial x} - \sigma_{xy} \frac{\partial C_y^*}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{xz}C_z^*)}{\partial x} - \sigma_{xz} \frac{\partial C_z^*}{\partial x} \\
& + \frac{\partial(\sigma_{xy}C_x^*)}{\partial y} - \sigma_{xy} \frac{\partial C_x^*}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_{yy}C_y^*)}{\partial y} - \sigma_{yy} \frac{\partial C_y^*}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_{yz}C_z^*)}{\partial y} - \sigma_{yz} \frac{\partial C_z^*}{\partial y} \\
& + \frac{\partial(\sigma_{xz}C_x^*)}{\partial z} - \sigma_{xz} \frac{\partial C_x^*}{\partial z} + \frac{\partial(\sigma_{yz}C_y^*)}{\partial z} - \sigma_{yz} \frac{\partial C_y^*}{\partial z} + \frac{\partial(\sigma_{zz}C_z^*)}{\partial z} - \sigma_{zz} \frac{\partial C_z^*}{\partial z} \} dx dy dz = 0
\end{aligned}$$

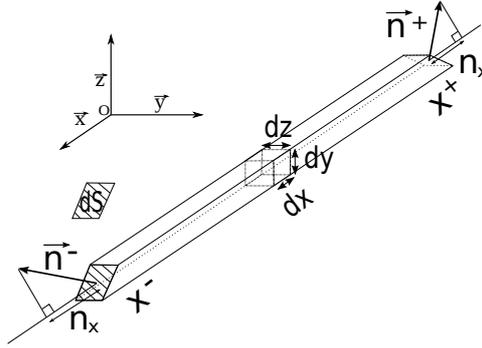


FIGURE C.10: Intégration d'un volume en forme de "frite" à facettes d'extrémités inclinées. On montre en Annexe A que  $n_x = dydz/dS$ .

En regroupant des termes et en finissant l'intégration par partie, on fait apparaître plus clairement :

$$\begin{aligned}
0 = & \int \int \int_{\Omega} \{(\vec{f} - \rho \vec{\gamma}) \cdot \vec{C}^*\} dx dy dz + \int \int \int_{\Omega} \{(\underline{\sigma} : \underline{\text{grad}} \vec{C}^*)\} dx dy dz + \\
& \int \int_{\partial\Omega} \{(\sigma_{xx} + \sigma_{xy} + \sigma_{xz})C_x^*|_{x^-}^{x^+}\} dy dz + \\
& \int \int_{\partial\Omega} \{(\sigma_{yx} + \sigma_{yy} + \sigma_{yz})C_y^*|_{y^-}^{y^+}\} dx dz + \\
& \int \int_{\partial\Omega} \{(\sigma_{xz} + \sigma_{yz} + \sigma_{zz})C_z^*|_{z^-}^{z^+}\} dx dy
\end{aligned}$$

où  $\partial\Omega$  désigne la surface du domaine  $\Omega$ ,  $x^-$  désigne la borne inférieure de l'intégrale selon  $\vec{x}$  et  $x^+$  la borne supérieure. Un peu de géométrie (voir en Annexe A) permet de remarquer que,  $\vec{n}$ , la normale sortante du milieu, est telle que  $n_x = \frac{dydz}{d\partial\Omega}$  en  $x^+$  et  $n_x = -\frac{dydz}{d\partial\Omega}$  en  $x^-$ . Pour les derniers termes de la somme précédente, il vient donc :

$$\begin{aligned}
& \int \int_{\partial\Omega} \{(\sigma_{xx} + \sigma_{xy} + \sigma_{xz})C_x^*\} n_x d\partial\Omega = \\
& \int \int_{\partial\Omega} \{(\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_x + \sigma_{xz}n_x)C_x^*\} d\partial\Omega = \int \int_{\partial\Omega} \{T_x C_x^*\} d\partial\Omega
\end{aligned}$$

De même, sachant que  $n_y = \pm \frac{dx dz}{d\partial\Omega}$  et  $n_z = \pm \frac{dx dy}{d\partial\Omega}$ , choisissant le signe  $\pm$  selon que l'on entre ou sort du domaine  $\Omega$ , il vient :

$$\begin{aligned} \int \int_{\partial\Omega} \{\vec{T} \cdot \vec{C}^*\} d\partial\Omega + \int \int \int_{\Omega} \{(\vec{f} - \rho \vec{\gamma}) \cdot \vec{C}^*\} dx dy dz \\ - \int \int \int_{\Omega} \{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{C}^*\} dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Comme les tenseurs des contraintes et des déformations sont symétriques dans notre cas de petites perturbations, on peut simplifier et faire apparaître les déformations.

### Théorème des puissances virtuelles

$$\begin{aligned} \int \int_{\partial\Omega} \{\vec{T} \cdot \vec{C}^*\} d\partial\Omega + \int \int \int_{\Omega} \{(\vec{f} - \rho \vec{\gamma}) \cdot \vec{C}^*\} dx dy dz \\ - \int \int \int_{\Omega} \{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{C}}}^*\} dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

En d'autres termes, la puissance des efforts intérieurs est égale à la puissance des efforts extérieurs.

Ce théorème est démontré pour un champ de contraintes statiquement admissible, i. e. l'équ. C.1 est toujours et partout respectée et pour un champ de vitesses cinématiquement admissible, i. e. fini continu et dérivable. Le premier terme représente la puissance des efforts extérieurs, le deuxième terme représente la puissance des forces volumiques et le troisième terme représente la puissance des efforts intérieurs. Dans le cas statique, le terme  $\rho \vec{\gamma}$  est considéré négligeable. On peut remplacer le vecteur vitesses  $\vec{C}^*$  par le vecteur déplacement  $\vec{D}^*$  pour aboutir alors au :

### Théorème des travaux virtuels

$$\begin{aligned} \int \int_{\partial\Omega} \{\vec{T} \cdot \vec{D}^*\} d\partial\Omega + \int \int \int_{\Omega} \{\vec{f} \cdot \vec{D}^*\} dx dy dz \\ - \int \int \int_{\Omega} \{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{D}^*)\} dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

En d'autres termes, le travail des efforts intérieurs est égal au travail des efforts extérieurs.

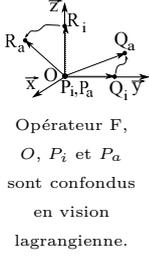
NB. On a postulé ici le principe de l'équilibre et démontré le théorème des puissances virtuelles. Si l'on postule le principe des puissances virtuelles, on démontre alors le théorème de l'équilibre.

Il est souvent commode d'utiliser des champ de déplacements "rigidifiant", i. e. des mouvements de translation et de rotation sans déformation,

pour exprimer respectivement un équilibre des forces et des moments. On peut ainsi choisir de démontrer le théorème de l'équilibre en mécanique des structures à partir du P. P. V.

### Annexe C.3. Vers les grandes déformations, transformations finies

Un autre point de vue fait apparaître la position actuelle plutôt que le déplacement. Remarquons que  $\underline{\underline{\text{grad}}}\vec{U}_P = \underline{\underline{\text{grad}}}(\vec{P}_i\vec{P}_a) = \underline{\underline{\text{grad}}}(\vec{P}_i\vec{O} + \vec{O}\vec{P}_a) = \underline{\underline{\text{grad}}}(\vec{O}\vec{P}_a - \vec{O}\vec{P}_i)$ . Remarquons ensuite que  $\underline{\underline{\text{grad}}}(\vec{O}\vec{P}_a - \vec{O}\vec{P}_i) = \underline{\underline{\text{grad}}}(\vec{O}\vec{P}_a) - \underline{\underline{\text{grad}}}(\vec{O}\vec{P}_i)$  et que  $\underline{\underline{\text{grad}}}(\vec{O}\vec{P}_i) = \underline{\underline{Id}}$ , on obtient donc  $\underline{\underline{\text{grad}}}(\vec{O}\vec{P}_a) = \underline{\underline{\text{grad}}}\vec{U}_P + \underline{\underline{Id}}$ . Voici donc une autre façon de voir l'évolution du déplacement, non pas sur la base des déplacements comme en 6 mais sur la base des positions actuelles des points.



$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{\text{grad}}}\vec{U}_P = \begin{bmatrix} \frac{\partial(x_a - x_i)}{\partial x_i} & \frac{\partial(x_a - x_i)}{\partial y_i} & \frac{\partial(x_a - x_i)}{\partial z_i} \\ \frac{\partial(y_a - y_i)}{\partial x_i} & \frac{\partial(y_a - y_i)}{\partial y_i} & \frac{\partial(y_a - y_i)}{\partial z_i} \\ \frac{\partial(z_a - z_i)}{\partial x_i} & \frac{\partial(z_a - z_i)}{\partial y_i} & \frac{\partial(z_a - z_i)}{\partial z_i} \end{bmatrix}_P$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_a}{\partial x_i} - 1 & \frac{\partial x_a}{\partial y_i} & \frac{\partial x_a}{\partial z_i} \\ \frac{\partial y_a}{\partial x_i} & \frac{\partial y_a}{\partial y_i} - 1 & \frac{\partial y_a}{\partial z_i} \\ \frac{\partial z_a}{\partial x_i} & \frac{\partial z_a}{\partial y_i} & \frac{\partial z_a}{\partial z_i} - 1 \end{bmatrix}_P \quad (\text{C.7})$$

$$\underline{\underline{\text{grad}}}\vec{O}\vec{P}_a = \underline{\underline{\text{grad}}}(\vec{O}\vec{P}_i + \vec{U}) = \underline{\underline{Id}} + \underline{\underline{\text{grad}}}\vec{U}_P = \underline{\underline{Id}} + \underline{\underline{H}} =$$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_a}{\partial x_i} & \frac{\partial x_a}{\partial y_i} & \frac{\partial x_a}{\partial z_i} \\ \frac{\partial y_a}{\partial x_i} & \frac{\partial y_a}{\partial y_i} & \frac{\partial y_a}{\partial z_i} \\ \frac{\partial z_a}{\partial x_i} & \frac{\partial z_a}{\partial y_i} & \frac{\partial z_a}{\partial z_i} \end{bmatrix}_P = \underline{\underline{\text{grad}}}\mathfrak{T} \quad (\text{C.8})$$

où  $\underline{\underline{F}}$  est appelé *tenseur gradient de la transformation*. Il transforme  $\vec{P}_i\vec{Q}_i$  en  $\vec{P}_a\vec{Q}_a$  et décrit ainsi comment un petit vecteur tourne et s'allonge/se raccourcit dans la transformation qui peut contenir une déformation et une rotation. En effet, de l'équ. 5 nous déduisons que  $\vec{P}_a\vec{Q}_i + \vec{Q}_i\vec{Q}_a = \vec{P}_i\vec{P}_a + \vec{P}_a\vec{Q}_i + \underline{\underline{H}}\vec{P}_i\vec{Q}_i$  puis  $\vec{P}_a\vec{Q}_a = \vec{P}_i\vec{Q}_i + \underline{\underline{H}}\vec{P}_i\vec{Q}_i$ , ce qui peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\vec{P}_a\vec{Q}_a = (\underline{\underline{Id}} + \underline{\underline{H}})\vec{P}_i\vec{Q}_i = \underline{\underline{F}}\vec{P}_i\vec{Q}_i \quad (\text{C.9})$$

La translation n'apparaît plus puisqu'elle est éliminée lors du calcul du gradient. Il s'agit maintenant de calculer la déformation de la matière - allongement/raccourcissement, distorsion - en éliminant les rotations de solide rigide. Comme l'indique l'équ. 2, la rotation est la partie antisymétrique de l'opérateur qui transforme un vecteur, donc la partie antisymétrique de  $\underline{\underline{H}}$  ou de  $\underline{\underline{F}}$ .

*Annexe C.4. Variation de longueur*

*Annexe C.4.1. Transformations finies*

On peut calculer simplement la nouvelle longueur d'un segment rapportée à sa longueur initiale en calculant la norme de  $\overrightarrow{OP_a}$  rapportée à la norme de  $\overrightarrow{OP_i}$ . Sans perdre de généralité, considérons à nouveau les vecteur unitaires  $[1, 0, 0]$ ,  $[0, 1, 0]$  et  $[0, 0, 1]$ . La longueur actuelle  $\lambda_{xx}$  de  $[1, 0, 0]$  vaut donc :

$$\lambda_{xx}^2 = [F_{xx}, F_{yx}, F_{zx}] \cdot [F_{xx}, F_{yx}, F_{zx}] = F_{xx}^2 + F_{yx}^2 + F_{zx}^2$$

$$\frac{\partial x_a^2}{\partial x_i} + \frac{\partial y_a^2}{\partial x_i} + \frac{\partial z_a^2}{\partial x_i} \quad (C.10)$$

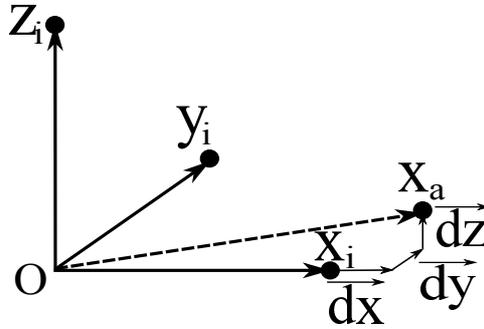


FIGURE C.11: Mesure de la longueur actuelle d'un segment infiniment petit.

*Annexe C.5. Formalisme du "deuxième gradient"*

On parle de "deuxième gradient" lorsqu'un des paramètres pertinents pour décrire la déformation d'un milieu est le gradient des déformations, donc le "deuxième" gradient des déplacements. Ce formalisme est utilisé dans de rares cas essentiellement pour des matériaux composites ou eux-mêmes à gradient de propriétés. Ce formalisme permet de considérer une structure - ou microstructure - comme un matériau. D'un point de vue conceptuel, une longueur interne apparaît.

**Références**

- [1] Anderson, T.L., 2005. *Fracture Mechanics - Fundamentals and Applications*. Taylor and Francis Group. third edition.
- [2] Germain, P., Muller, P., 1995. *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Masson. second edition.
- [3] Lemaitre, J., Jean-Louis, C., 1988. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod. second edition.

- [4] Ward, I., Sweeney, J., 2000. The Mechanical Properties of Solid Polymers. Wiley VCH.