

# Mécanique des structures

Christophe Fond

Université de Strasbourg

1. Méthode des déplacements.....	1
1.1. Introduction .....	1
1.2. Solution de base .....	2
1.2.1. Poutres considérées .....	2
1.2.2. Composante liée à l'effort normal .....	2
1.2.3. Cas des poutres non chargées, bielles des poutres en treillis .....	4
1.2.4. Exemple pour un système triangulé .....	4
1.2.5. Chargement entre les nœuds selon $x$ .....	6
1.2.6. Composantes liées à la flexion .....	6

## 1. Méthode des déplacements

### 1.1. Introduction

La méthode des déplacements est basée sur la solution analytique obtenue pour une poutre dont les extrémités sont soumises à des déplacements et rotations données<sup>1</sup>. Elle constitue une méthode systématique de résolution qui se prête bien à la programmation informatique. Malheureusement, sans outil informatique, elle conduit souvent à des calculs fastidieux. Nonobstant, elle présente un grand intérêt pour l'apprentissage et peut constituer une introduction à la méthode des éléments finis.

Sans rien perdre conceptuellement, nous nous limiterons à des structures planes dans un plan  $(X, Z)$ . Les déplacements seront notés  $U_i$  selon  $X$ ,  $W_i$  selon  $Z$  et la rotation dans ce plan  $\theta_i$  selon  $Y$ . L'indice  $i$  désigne le nœud numéro  $i$ .  $(U_i, W_i, \theta_i)$  sont appelés les degrés de liberté du nœud<sup>2</sup>. Il n'y a donc pas de torsion autour de l'axe  $x$  de la génératrice dans les poutres. Nous noterons en minuscules  $(u_i, w_i)$  les déplacements exprimés dans le repère local  $(x, z)$  de la poutre et en majuscules ceux exprimés dans le repère global  $(X, Z)$ , généralement celui de la structure. Deux choix sont possibles pour les efforts aux extrémités des poutres, soit on considère les efforts intérieurs  $(N, V, M)$  – ce sera le cas ici –, soit on considère les forces et couples appliqués.



Poutre orientée entre les nœuds  $i$  et  $j$ .

Les données du problème sont :

---

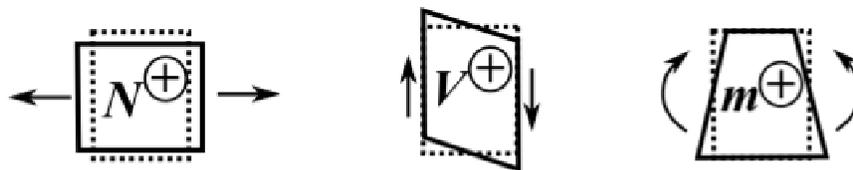
<sup>1</sup> Elle est aussi appelée méthode des relaxations car on peut considérer que les poutres sont chargées pendant que les nœuds sont bloqués en déplacements et rotation puis débloqués pour minimiser l'énergie potentielle de la structure et ainsi satisfaire aux conditions d'équilibre.

<sup>2</sup> Dans le plan, il y a 3 degrés de liberté par nœud. Dans l'espace, il y a 6 degrés de liberté par nœud, 3 déplacements et trois rotations.

- les nœuds définis par leurs coordonnées spatiales et les types de liaisons (rotule en extrémité de poutre, encastrement sur appui...),
- les poutres chacune définie par deux nœuds et ses caractéristiques géométriques et matériau,
- les conditions aux limites définies par les charges imposées et les déplacements imposés.

En utilisant la solution de l'équilibre et la déformée de la poutre calculée une fois pour toutes dans ce cours, le principe de résolution est :

- on procède à l'écriture des équations d'équilibre de tous les nœuds de la structure,
- on met en forme le système linéaire d'équation, les efforts donnés sont remplacés par leur valeur (0 par exemple pour une extrémité libre non chargée) et les efforts inconnus sont exprimés à partir des déplacements et rotations,
- on résout le système linéaire d'équations,
- on trace les diagrammes, on calcule éventuellement des déplacements entre des nœuds.



*Rappel des conventions de signes pour les efforts intérieurs, traction, cisaillement et flexion.*

## 1.2. Solution de base

### 1.2.1. Poutres considérées

Les poutres considérées ici ont une section constante et un module d'Young constants entre les nœuds. Lorsque ce n'est pas le cas et que le logiciel utilisé ne prévoit pas d'autre cas il conviendra de faire un calcul approximatif en découpant la poutre en tronçons qui auront des caractéristiques constantes par tronçon. On s'assurera que le nombre de tronçons assure une précision suffisante des résultats en cohérence avec toutes les autres approximations faites par ailleurs.

### 1.2.2. Composante liée à l'effort normal

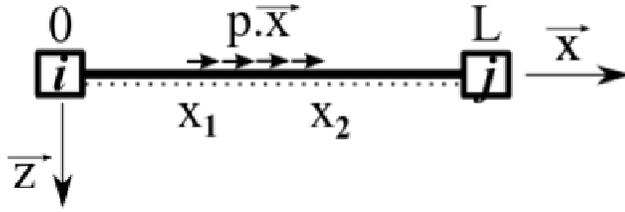
Il s'agit de calculer une fois pour toutes la solution d'un problème de poutre chargée ou non sans connaître a priori les conditions aux limites aux extrémités. En pratique, on se donne un déplacement  $u_i$  selon  $x$  et un effort normal  $N_{ij}$  – pour l'instant inconnu – à l'extrémité de la poutre du côté du nœud  $i$  et on intègre les efforts et les déplacements jusqu'à l'autre extrémité  $j$ . Il faut bien sûr respecter l'équilibre en tout point et le comportement du matériau. Les sections droites restent droites puisque l'on utilise la théorie des poutres. On obtient ainsi le déplacement  $u_j$  et l'effort normal  $N_{ji}$  à l'autre extrémité aux constantes de départ  $u_i$  et  $N_{ij}$  près, c'est à dire que l'on obtient le déplacement relatif et l'effort normal relatif.

Un chargement astucieux qui permet de couvrir une large gamme de types de chargement consiste à ne charger uniformément qu'entre l'abscisse  $x_1$  et l'abscisse  $x_2$ . Donc :

$$N(x) = N_{ij} - \int_0^x P(s) ds \quad \text{et} \quad P(s) = p \text{ si } s \in [x_1, x_2], P(s) = 0 \text{ si } s \notin [x_1, x_2]$$

où est orienté selon  $x$ . L'effort normal dans la poutre de longueur  $L$  prend donc les valeurs suivantes :

$0 \leq x \leq x_1$	$x_1 \leq x \leq x_2$	$x_2 \leq L$
$N(x) = N_{ij}$	$N(x) = N_{ij} - p(x - x_1)$	$N(x) = N_{ij} - p(x_2 - x_1) = N_{ji}$



Chargement normal entre les nœuds i et j.

La poutre se déforme en allongement et/ou raccourcissement selon :

$$u(x) = u_i + \int_0^x \frac{N(s)}{E(s)A(s)} ds = u_i + \int_0^x \frac{N(s)}{EA} ds$$

car on considère le cas où  $E(s)A(s)$  est constant le long de la poutre<sup>3</sup>.

$0 \leq x \leq x_1$	$x_1 \leq x \leq x_2$	$x_2 \leq L$
$u(x) = u_i + \frac{N_{ij}}{EA} x$	$u(x) = u_i + \int_0^x \frac{N_{ij} - P(s)}{EA} ds$ $= u_i + \frac{N_{ij}}{EA} x - \frac{p(x-x_1)^2}{2EA}$	$u(x) = u_i + \frac{N_{ij}}{EA} x - \frac{p(x_2-x_1)^2}{2EA}$ $- \frac{p(x_2-x_1)(x-x_1)}{EA}$

On peut maintenant calculer le déplacement du nœud j :

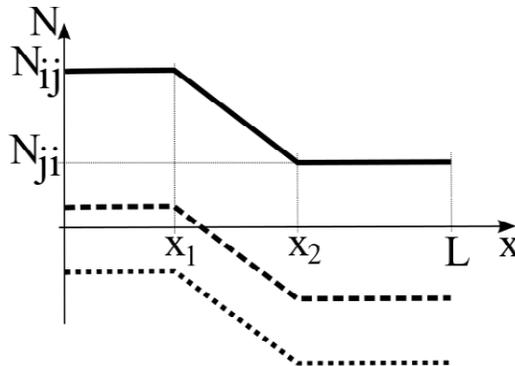
$$u_j = u(L) = u_i + \frac{N_{ij}}{EA} L - \frac{p(x_2-x_1)^2}{2EA} - \frac{p(x_2-x_1)(L-x_1)}{EA} = u_i + \frac{N_{ij}}{EA} L - \frac{p(2L-x_2-x_1)(x_2-x_1)}{2EA}$$

On rappelle que  $N_{ij}$  est indépendant de  $v_i$ ,  $v_j$ ,  $\theta_i$  et  $\theta_j$ . Exprimons maintenant  $N_{ij}$  en fonction de  $u_i$  et  $u_j$  :

$$N_{ij} = (u_j - u_i) \frac{EA}{L} + \frac{p(2L-x_2-x_1)(x_2-x_1)}{2L}$$

Et notons  $N_{ij}^0 = \frac{p(2L-x_2-x_1)(x_2-x_1)}{2L}$  puis  $N_{ji}^0 = \frac{-p(x_2^2-x_1^2)}{2L}$

car  $N_{ji} = N_{ij} - p(x_2-x_1) = (u_j - u_i) \frac{EA}{L} - \frac{p(x_2^2-x_1^2)}{2L}$



<sup>3</sup> Si cela n'est pas le cas, on pourra obtenir une approximation en procédant à une sous-structuration en créant des nœuds intermédiaires entre i et j puis en considérant que EA est constant par morceau.

Diagramme d'effort normal pour un chargement entre  $x_1$  et  $x_2$ . Trois possibilités sont représentées chacune pour une valeur possible de  $N_{ij}$ .

Pour l'informatique, on peut mettre ces équations sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} N_{ij} \\ N_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EA/L & EA/L \\ -EA/L & EA/L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{ij}^0 \\ N_{ji}^0 \end{bmatrix}$$

Enfin notons que  $N_{ij} - N_{ji} = p(x_2 - x_1) = N_{ij}^0 - N_{ji}^0$  ce qui traduit que la différence d'effort normal entre les extrémités est due au chargement extérieur et que celui-ci est reporté aux nœuds à l'aide des termes  $N_{ij}^0$  et  $N_{ji}^0$ .

Pour les systèmes dits triangulés, i. e. constitué de barres rotulées aux deux extrémités ou assimilées comme telles, ces dernières équations suffisent pour résoudre le problème.

### 1.2.3. Cas des poutres non chargées, bielles des poutres en treillis

Si  $P(s)=0$ , i. e.  $p=0$ , les équations précédentes se simplifient et l'on obtient :

$$u_j = u(L) = u_i + \frac{N_{ij}}{EA}$$

ce qui équivaut à :

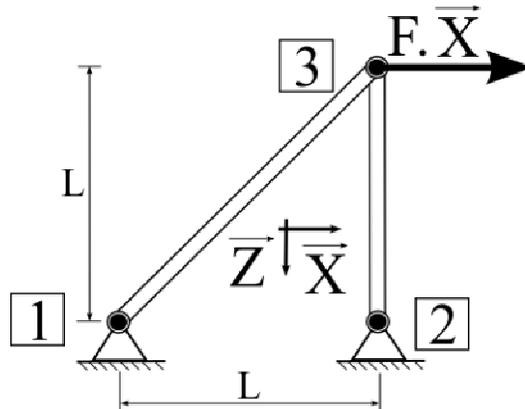
$$N_{ji} = N_{ij} = (u_j - u_i) \frac{EA}{L}$$

Pour l'informatique, on peut mettre ces équations restreintes aux poutres non chargées sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} N_{ij} \\ N_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EA/L & EA/L \\ -EA/L & EA/L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

### 1.2.4. Exemple pour un système triangulé

Considérons deux barres assemblées par des rotules constituant la structure de la figure suivante. On considérera que le produit de l'aire par le module d'élasticité, i. e.  $EA$ , est constant et le même pour les deux barres.



Structure triangulée à deux barres.

Pour cette structure isostatique, les trois équations d'équilibre peuvent suffire pour tout déterminer. Rappelons que l'équilibre d'une barre – droite ou non - avec une rotule à chacune de ses extrémités impose que la force transmise soit colinéaire à la direction définie par les deux rotules. Nommons  $F_{1X}$  et  $F_{1Z}$  les composantes de réactions d'appui selon  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Z}$  au nœud 1 et de façon analogue  $F_{2X}$  et  $F_{2Z}$  pour le nœud 2. L'équilibre statique impose  $F_{1X} + F_{2X} + F = 0$  et  $F_{1Z} + F_{2Z} = 0$  et  $-F L - F_{2Z} L = 0$  d'où  $F_{2Z} = -F$  et  $F_{1Z} = F$  et  $F_{2X} = 0$  et  $F_{1X} = -F$ . Il est aisé d'en déduire ensuite les efforts dans les barres puis les déformations des barres.

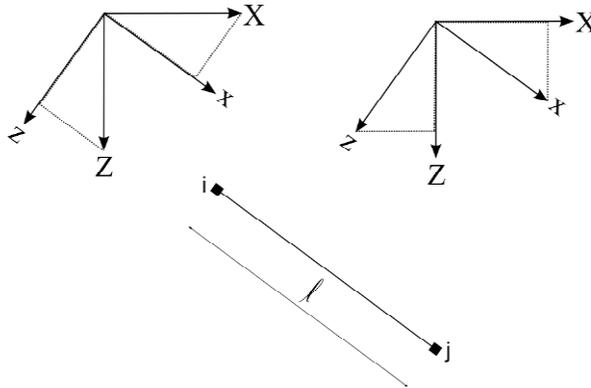
Vérifions ceci par la méthode des déplacements. Les conditions aux limites imposent que seul le déplacement du nœud 3 est non nul. Les 6 inconnues du problème sont  $F_{1X}$ ,  $F_{1Z}$ ,  $F_{2X}$ ,  $F_{2Z}$ ,  $U_3$  et  $W_3$ . Ecrivons les 6 équations d'équilibre des actions sur les nœuds :

$$\text{Nœud 1 : } F_{1X} + \frac{1}{\sqrt{2}}N_{13} = 0 \quad \text{et} \quad F_{1Z} - \frac{1}{\sqrt{2}}N_{13} = 0$$

$$\text{Nœud 2 : } F_{2X} = 0 \quad \text{et} \quad F_{2Z} - N_{23} = 0$$

$$\text{Nœud 3 : } F - \frac{1}{\sqrt{2}}N_{31} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}N_{31} + N_{32} = 0$$

Il est commode d'utiliser les expressions suivantes pour les changements de repère (où les caractères gras désignent des vecteurs).



Un nœud  $i$  est défini par ses coordonnées  $(X_i, Z_i)$  dans le repère global  $(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$  et par  $(x_i, z_i)$  dans le repère local de la poutre  $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ .

$$\ell = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}$$

$$\mathbf{x} = \frac{X_j - X_i}{\ell} \mathbf{X} + \frac{Z_j - Z_i}{\ell} \mathbf{Z} \quad \mathbf{z} = -\frac{Z_j - Z_i}{\ell} \mathbf{X} + \frac{X_j - X_i}{\ell} \mathbf{Z}$$

$$\mathbf{X} = \frac{X_j - X_i}{\ell} \mathbf{x} - \frac{Z_j - Z_i}{\ell} \mathbf{z} \quad \mathbf{Z} = \frac{Z_j - Z_i}{\ell} \mathbf{x} + \frac{X_j - X_i}{\ell} \mathbf{z}$$

Il faut maintenant faire apparaître les déplacements. Les déplacements dans le repère local de la barre 1-3 s'expriment à l'aide de leurs correspondants dans le repère global :  $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}U_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}W_3$  et

$w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}U_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}W_3$ . Etant donné que  $U_1 = 0$ ,  $W_1 = 0$ ,  $U_2 = 0$  et  $W_2 = 0$ , il vient :

$$\text{Nœud 1 : } F_{1X} + \frac{EA}{2\sqrt{2}L}(U_3 - W_3) = 0 \quad \text{et} \quad F_{1Z} - \frac{EA}{2\sqrt{2}L}(U_3 - W_3) = 0$$

$$\text{Nœud 2 : } F_{2X} = 0 \quad \text{et} \quad F_{2Z} + \frac{EA}{L}W_3 = 0$$

$$\text{Nœud 3 : } F - \frac{EA}{2\sqrt{2}L}(U_3 - W_3) = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{EA}{L}W_3 + \frac{EA}{2\sqrt{2}L}(U_3 - W_3) = 0$$

Il suffit maintenant de résoudre ce système de 6 équations à 6 inconnues. On trouve finalement

$$W_3 = \frac{FL}{EA}, U_3 = \frac{FL}{EA}(1 + 2\sqrt{2}), F_{1X} = -F, F_{1Z} = F, F_{2X} = 0 \quad \text{et} \quad F_{2Z} = -F.$$

### 1.2.5. Chargement entre les nœuds selon x

L'étudiant.e se reportera au cours complet à l'adresse  
[http://espace2christophe.chez.com/cours\\_ms\\_rdm.pdf](http://espace2christophe.chez.com/cours_ms_rdm.pdf) pages 44 à 48.

### 1.2.6. Composantes liées à la flexion

L'étudiant.e se reportera au cours complet à l'adresse  
[http://espace2christophe.chez.com/cours\\_ms\\_rdm.pdf](http://espace2christophe.chez.com/cours_ms_rdm.pdf) pages 48 à 53.